１．４つの玉を３つの箱に入れる入れ方の総数は何通りあるか次のそれぞれの場合に答えて下さい。

（１）玉にも箱にも区別が無い場合。

（２）玉に区別は無いが、箱はそれぞれ異なった形をしていて区別される場合。

（３）玉にはそれぞれ異なった色が塗られていて区別されるが、箱に区別は無い場合。

配点：（１）１０点、（２）１０点、（３）１０点	シラバス達成度目標：ア

解答例　その１　（１）玉にも箱にも区別が無いので、箱に幾つずつ玉が入っているかだけが問題になります。そのヴァリエーションは

$$(0,0,4),\quad (0,1,3),\quad (0,2,2),\quad (1,1,2)$$

の４通りしかありません。

A　数え方が良くなかったり、大きな数字になってしまったりしたもの　３点

C　数え方の少しのミス　７点

（２）同様に全て書き出してみれば

$$(0,0,4),(0,1,3),(0,2,2),(0,3,1),(0,4,0),(1,0,3),(1,1,2),(1,2,1),(1,3,0),$$
$$(2,0,2),(2,1,1),(2,2,0),(3,0,1),(3,1,0),(4,0,0)$$

の１５通りです。

B　こちらの場合も『解答例　その１』と同様の基準で採点します。

（３）さっき（１）で見た各場合について玉の区別によるヴァリエーションを数えて行きます。

まず $(0,0,4)$ の場合は、全ての玉が同じ箱に入っていますから玉を区別してもヴァリエーションは１通りしかありません。

次に $(0,1,3)$ の場合いですが、１つだけで箱に入っている玉の色のヴァリエーションが４通りありますが、その他は同じ箱に入っているのでヴァリエーションはこれだけです。

$(0,2,2)$ の場合は、要するに４つの玉を２個ずつの２グループに分ける分け方の総数だけヴァリエーションがあります。４つから２つ選ぶ方法は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りありますが、このうちある２つを選んだ場合とその他の２つを選んだ場合では箱に区別が無いので玉の分け方としては同じ事になっています。従ってこの場合のヴァリエーションは $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2}=3$ 通りです。

最後に $(1,1,2)$ の場合ですが、一緒に入る２つの選び方に ${}_4\mathrm{C}_2=6$ だけあって、これが決まれば他は別の箱に入りますから全て決定してしまいます。従ってこの場合は６通りです。

以上により、玉を区別するとその入れ方のヴァリエーションは $1+4+3+6=14$ 通りです。

解答例　その２　『箱に入れる』と云う言葉を、『玉が１つも入らない箱はない』と解釈した場合も認める事にします。この場合の解答例は以下の通り：

（１）まず１つずつ３つの箱に入ると１個余るから、どれかの箱に２つ入る事になります。そうすると箱に区別は無いので２個、１個、１個入った状態しか無いので入れ方は１通りです。

（２）玉が２つ入った箱のヴァリエーションで３通りです。

（３）２つ入る箱にどの玉が入るかだけがヴァリエーションですので、${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りです。

２．$\left(x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ を展開したときに現れる項の中で、x^{11} の係数を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：イ

解答例　展開式は

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{10} = \sum_{n=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_n x^{2(10-n)} \left(-\frac{1}{2x}\right)^n = \sum_{n=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_n x^{20-3n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ですが、x^{11} は $n=3$ の時だけですのでその係数は

$${}_{10}\mathrm{C}_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2^3} = -15$$

であることが分かります。

A　普通に展開して計算したがミス　６点

C　２項展開を使っているがミス　８点

D　何らかの値が出ていたり、計算したりしているが
ちょっと的が外れているもの　３点

３．１組のトランプから絵札を除いた４０枚を用意して、その中から５枚引いた時にツーペアが出る確率を求めて下さい（答えは出来るだけ約分した分数の形で書いて下さい)。ただし、スリーカードやフルハウス、フォーカードは出来ていないものとします。

ツーペア：　2♡、2♠、5◇、5♡、9♡ の様に、同じ数字のペアが２組出る手。

スリーカード：　3◇、3♡、3♠、10♠、1♣ の様に、同じ数字が３枚出る手。

フォーカード：　4◇、4♠、4♡、4♣、7♡ の様に、同じ数字が４枚出る手。

フルハウス：　6♡、6♣、6◇、8♠、8♣ の様に、
同じ数字が３枚と別の数字のペアが出る手。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　まずどんな数字のツーペアが出来ているかによって ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りのヴァリエーションがあります。更にそれぞれのペアがどんなスート（絵柄）で出来ているかによって、それぞれ ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りずつのヴァリエーションがあります。また、残り１枚はこのツーペアに出て来た数字ではありませんからそこに $40-8$ 通りのヴァリエーションがあります。従ってツーペアのヴァリエーションは

$${}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot ({}_4\mathrm{C}_2)^2 \cdot 32 = 45 \cdot 6^2 \cdot 32$$

通りあります。

一方、５枚引いた時の全ての可能性は

$${}_{40}\mathrm{C}_5 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36$$

通りですから、求める確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot ({}_4\mathrm{C}_2)^2 \cdot 32}{{}_{40}\mathrm{C}_5} = \frac{45 \cdot 6^2 \cdot 32}{13 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36} = \frac{720}{9139}$$

です。

A　分母、分子共にある程度考えて計算している　７点

B　分母（全体数）の計算のみ　５点

C　少しの計算で途中まで、など　４点

４．　Ａ組の学生は４０人ですが、そのうち３０人が電車通学、１０人が自転車通学です。電車通学の学生の中には毎日 $\frac{1}{50}$ の割合で遅刻をする学生がおり、自転車通学の場合には $\frac{1}{10}$ の割合で遅刻者が出ます。
　今日、Ａ組の学生の中から１人勝手に選んだところ彼は遅刻だったようですが、この条件のもとで彼が電車通学である確率を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：エ

解答例　選んだ学生が電車通学である事象を E_T、自転車通学である事象を E_B、遅刻である事象を E_L とします。
　分かっている事は

$$P_{E_T}(E_L) = \frac{1}{50}, \quad P_{E_B}(E_L) = \frac{1}{10}, \quad P(E_T) = \frac{30}{40}, \quad P(E_B) = \frac{10}{40}$$

です。すると、

$$\begin{aligned} P_{E_L}(E_T) &= \frac{P(E_T \cap E_L)}{P(E_L)} \\ &= \frac{P(E_T \cap E_L)}{P(E_T \cap E_L) + P(E_B \cap E_L)} \\ &= \frac{P_{E_T}(E_L)P(E_T)}{P_{E_T}(E_L)P(E_T) + P_{E_B}(E_L)P(E_B)} \\ &= \frac{\frac{1}{50}\frac{30}{40}}{\frac{1}{50}\frac{30}{40} + \frac{1}{10}\frac{10}{40}} \\ &= \frac{30}{30+50} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

となる事が分かります。

A　条件付きの確率でなく P($E_T \cap E_L$) を求めてしまっているなど　４点

B　ベイズの定理などを使って条件付きの確率を求めようとはしているがミスのあるもの　７点

C　的の外れた計算のみ　３点

５．　袋の中に赤玉が２個、白玉が１個入っています。この袋から復元抽出で１個ずつ４回玉を取り出すとき、白玉の出て来た回数を X とします。

（１）白玉が２回出る確率 $P[X=2]$ を求めて下さい。

（２）確率変数 X の分布表を書いて下さい。

（３）X の期待値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：（１）１０点、（２）１０点、（３）１０点	シラバス達成度目標：エ、オ

解答例　（１）玉の出方の総数は 3^4 通りあります。また、そのうち白が２回出る場合は、まず白が何回目に出たかで ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり、赤玉のバリエーションで 2^2 通り、合計 ${}_4\mathrm{C}_2 \cdot 2^2$ 通りあります。
　従って求める確率は

$$P[X=2] = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 \cdot 2^2}{3^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2^2}{3^4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{8}{27}$$

です。

A　赤玉のヴァリエーションを見ていない　６点

B　ほんの少しのミス　８点

C　何回目に白が出るかのヴァリエーションを見ていない　６点

D　根本的な数え方ミス　４点

（2）同様に、白玉が k 回出る確率は、出方のヴァリエーションが白の出たのが何回目かで ${}_4\mathrm{C}_k$ 通り、赤玉のヴァリエーションで 2^{4-k} 通りあるので

$$P[X=k]=\frac{{}_4\mathrm{C}_k\cdot 2^{4-k}}{3^4}$$

となります。これらを求めておくと

$$P[X=0]=\left(\frac{2}{3}\right)^4,\quad P[X=1]=\frac{2^5}{3^4},\quad P[X=3]=\frac{2^3}{3^4},\quad P[X=4]=\frac{1}{3^4}$$

ですので分布表は以下の通り：

k	0	1	2	3	4
$P[X=k]$	$\frac{2^4}{3^4}$	$\frac{2^5}{3^4}$	$\frac{3\cdot 2^3}{3^4}$	$\frac{2^3}{3^4}$	$\frac{1}{3^4}$

A　赤玉のヴァリエーションを見ていない　６点

B　値が０の欄なし　ー１点

C　確率の計算ミス　ー３点

D　確率の計算が見当はずれ　４点

E　ほんの少しの軽いミス　８点

（3）分布表から、求める期待値は

$$E[X]=\frac{2^5}{3^4}+2\cdot\frac{3\cdot 2^3}{3^4}+3\cdot\frac{2^3}{3^4}+4\cdot\frac{1}{3^4}=\frac{108}{81}=\frac{4}{3}$$

です。

A　（２）が間違っていても、（２）から（３）の計算が正しければ１０点とする

B　重大な計算の仕方ミス　２点

C　普通の計算ミス　７点

D　計算式は良いが値が出せていない　４点

６．次の分布表に従う確率変数 Q の期待値 $E[Q]$ と分散 $V[Q]$ を求めて下さい。

n	-1	0	1	3	4
$P[Q=n]$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

配点：１０点	シラバス達成度目標：オ、カ

解答例　まず期待値は

$$E[Q]=(-1)\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{-3+1+6+4}{8}=1$$

であり、

B　期待値が正しく出せて　６点

D　期待値の計算で少しのミス　５点

E　期待値の計算でミス　４点

分散は

$$V[Q]=E[(Q-E[Q])^2]=4\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{8}=\frac{12+1+8+9}{8}=\frac{15}{4}$$

です。

C　分散の計算ミス　２点

A　少し計算しているが、全体に的が外れているもの　２点