１．７を正の奇数の和で表す方法の総数 $O(7)$ と、異なる正の整数の和で表す方法の総数 $Q(7)$ を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　それぞれ実際に数えてみれば

$$
\begin{array}{llr}
O(7) & Q(7) & \\
7 = 7 & 7 = 7 & (1) \\
\quad = 5+1+1 & \quad = 6+1 & (2) \\
\quad = 3+3+1 & \quad = 5+2 & (3) \\
\quad = 3+1+1+1+1 & \quad = 4+3 & (4) \\
\quad = 1+1+1+1+1+1+1 & \quad = 4+2+1 & (5)
\end{array}
$$

となり、$O(7), Q(7)$ 共に 5 です。

２．６個の数字１、１、１、２、３、３を全部使って並べて出来る６桁の整数は全部で何個ありますか。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　これは６個の箱を用意してそこに数字を１つずつ入れて行くと考えます。

まず２の入る箱の選び方は 6 通りあり、そのそれぞれの場合に残りの５個の箱の中から３の入る箱を選ぶ方法は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りあります。残り３つの箱には全て１が入り全て確定して６桁の整数になりますから求める個数は

$$6 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 60$$

です。

３．$\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^{14}$ を展開したときに現れる項の中で、x^{-2} の係数を求めて下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】　展開したときの一般項は

$$ {}_{14}\mathrm{C}_m x^m \left(\frac{1}{x^3}\right)^{14-m} = {}_{14}\mathrm{C}_m x^{4m-42} $$

ですから、これが x^{-2} の項であるためには $m=10$ であれば良く、その時の係数は

$$ {}_{14}\mathrm{C}_{10} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1001 $$

です。

４．Ａ社は２つの工場Ｐ、Q で同一の製品を１対２の割合で製造しました。Ｐ工場で生産された製品の 2 %が不良品であり、Q 工場で生産された製品の 1.5 %が不良品であることが分かっています。

２つの工場で生産された全ての製品の中から任意に一つ選んだとき不良品でした。これがＰ工場製である確率を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ウ、エ

【解答例】　全ての製品の中から１つ選ぶ試行においてそれがＰ工場製である事象を E_P、Q 工場製である事象を E_Q とし、更に不良品である事象を E_F とします。

問題文に与えられているデータから

$$ P(E_P)=\frac{1}{3},\quad P(E_Q)=\frac{2}{3},\quad P_{E_P}(E_F)=\frac{2}{100},\quad P_{E_Q}(E_F)=\frac{1.5}{100} $$

であることが分かっていますから求める（条件付き）確率は

$$ \begin{aligned} P_{E_F}(E_P) &= \frac{P(E_P\cap E_F)}{P(E_F)} \\ &= \frac{P(E_P\cap E_F)}{P(E_F\cap E_P)+P(E_F\cap E_Q)} \\ &= \frac{P(E_P)P_{E_P}(E_F)}{P(E_P)P_{E_P}(E_F)+P(E_Q)P_{E_Q}(E_F)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{100}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1.5}{100}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned} $$

となります。

５．　１つの箱の中に赤玉５つと白玉４個が入っています。Ａ、Ｂ２人がＡから始めて交互に箱の中から玉を１つ取り出し、先に白玉を取り出した者の勝ちとします。ただし取り出した玉は元に戻さない事にします。Ａ、Ｂそれぞれの勝つ確率を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：ウ、エ

【解答例】　赤玉は５個しかありませんので少なくとも６回目終了時点には勝敗は決しているはずですから、Ａが勝つのは１、３、５回目の可能性があります。Ａが１回目に勝つ確率 P_1^A は $\frac{4}{9}$ ですし、３・５回目に勝つ確率 P_3^A, P_5^A はそれぞれ

$$P_3^A = \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{4}{7}, \quad P_5^A = \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5}$$

となります。従ってＡの勝つ確率 P^A は

$$\begin{aligned} P^A &= P_1^A + P_3^A + P_5^A \\ &= \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{4}{7} + \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5} \\ &= \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 5\cdot 4^2\cdot 6\cdot 5 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 4}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} \\ &= \frac{4\cdot 7 + 5\cdot 2 + 2}{9\cdot 7} \\ &= \frac{40}{63} \end{aligned}$$

となります。

一方Ｂが勝つのは２、４、６回目のいずれかでありそれぞれの確率 P_j^B は

$$P_2^B = \frac{5}{9}\frac{4}{8}, \quad P_4^B = \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6}, \quad P_6^B = \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{4}{4}$$

であり、Ｂの勝つ確率 P^B は

$$\begin{aligned} P^B &= P_2^B + P_4^B + P_6^B \\ &= \frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{4}{6} + \frac{5}{9}\frac{4}{8}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{4}{4} \\ &= \frac{5\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4} \\ &= \frac{7\cdot 5 + 2\cdot 5 + 1}{9\cdot 7\cdot 2} \\ &= \frac{23}{63} \end{aligned}$$

です。

６．さいころを５回振り、３の出た回数を X とします。

（１）３が３回出る確率 $P[X=3]$ を求めて下さい。

（２）確率変数 X の分布表を書いて下さい。

（３）X の期待値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：（１）・（２）あわせて１０点、（３）１０点	シラバス達成度目標：ウ、オ、カ

【解答例】　（１）さいころの目の出方の総数は 6^5 通りあります。また、そのうち３が３回出る場合は、まず３が何回目に出たかで ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあり、そのそれぞれの場合について他の３以外が出たときの出目のバリエーションで 5^2 通り、合計 ${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 5^2$ 通りあります。

従って求める確率は

$$P[X=3] = \frac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot 5^2}{6^5} = \frac{5\cdot 4\cdot 5^2}{6^5\cdot 2\cdot 1} = \frac{250}{6^5} = \frac{125}{3888}$$

です。

（２）同様に、３が k 回出る確率は、

$$P[X=k] = \frac{{}_5\mathrm{C}_k \cdot 5^{5-k}}{6^5}$$

となります（$k=0,1,2,3,4,5$）。これらを求めておくと

$$P[X=0] = \frac{5^5}{6^5}$$
$$P[X=1] = \frac{5^5}{6^5}$$
$$P[X=2] = \frac{1250}{6^5}$$
$$P[X=4] = \frac{25}{6^5}$$
$$P[X=5] = \frac{1}{6^5}$$

ですので分布表は以下の通り：

k	0	1	2	3	4	5
$P[X=k]$	$\frac{5^5}{6^5}$	$\frac{5^5}{6^5}$	$\frac{1250}{6^5}$	$\frac{250}{6^5}$	$\frac{25}{6^5}$	$\frac{1}{6^5}$

（３）分布表から、求める期待値は

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{5^5}{6^5} + 2\cdot\frac{1250}{6^5} + 3\cdot\frac{250}{6^5} + 4\cdot\frac{25}{6^5} + 5\cdot\frac{1}{6^5} \\ &= \frac{3125+2500+750+100+5}{6^5} \\ &= \frac{6480}{6^5} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

です。

７．次の分布表に従う確率変数 Q の期待値 $E[Q]$ と分散 $V[Q]$ を求めて下さい。

n	1	2	3	4
$P[Q=n]$	0.4	0.3	0.2	0.1

配点：１０点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】

$$\begin{aligned} E[Q] &= 1\cdot 0.4 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.2 + 4\cdot 0.1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[Q] &= E[(Q-E[Q])^2] \\ &= E[Q^2] - (E[Q])^2 \\ &= 1\cdot 0.4 + 4\cdot 0.3 + 9\cdot 0.2 + 16\cdot 0.1 - 2^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$