

問題 1 1、1、1、2、3 から 3 個の数字を選んで並べて出来る 3 桁の数のうち、異なるものは何個ありますか。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

【解答例 その 1 辞書式書き下し】 小さいものから順に書いてみましょう。

111, 112, 113, 121, 123, 131, 132, 211, 213, 231, 311, 312, 321

これで全てですので 13 個です。

【解答例 その 2 ヴァリエーションを数える】 1 の個数で分類します。

1 が 3 つあるものは 1 つだけあります。

1 が 2 つあるものは、もう 1 つが 2 のものと 3 のものがあり、それぞれについてその 1 以外のものが 3 つのポジションのどこにあるかで 3 通りありますから、合計で 6 通りあります。

1 が 1 つだけのものは、結果的に 1 と 2 と 3 からなる数と云う事になり、これは 6 通りあります。

以上から合計で 13 個あることが分かります。

● 数え忘れ

1 つだけ - 2 点
2 つ以上 - 4 点

● 根本的に数え方がずれているもの 3 点

問題 2 432 の約数は何個ありますか。

配点：10 点 シラバス達成度目標：イ

【解答例】 まず 432 を因数分解します。

$$432 = 2^4 \cdot 3^3$$

従って 432 の約数は $2^j \cdot 3^k$ の形をしており、 j は 0、1、2、3、4、 k は 0、1、2、3 のいずれかですから、全部で 20 個あることが分かります。

- 4×3 で 12 個としたもの - 4 点
- 計算ミス - 4 点
- ちょっとした考え違いミス - 2 点

問題 3 次の値を求めて下さい。

(1) ${}_8P_3$ (2) ${}_7C_3$

配点：(1) 7 点、(2) 8 点 シラバス達成度目標：イ、ウ

【解答例】 (1) ${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ 。

$$(2) {}_7C_3 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

- $8!/3!$ などとしたもの 3 点
- 計算ミス 5 点

- $7 \cdot 6 \cdot 5$ としたものの 3 点
- 計算ミス 5 点

問題 4 6 人の学生さんを 2 人ずつ A、B、C の 3 組に分ける方法は何通りありますか。

配点：10 点

シラバス達成度目標：イ、ウ

●ここで 4 点

【解答例】 まず A 組に分ける学生さん 2 人の選び方で ${}_6C_2$ 通りあり、そのそれぞれについて B 組に分ける学生さんの選び方で ${}_4C_2$ 通りあります。この時点で残った 2 人が C 組に入りますから全て決定します。

従って、求める方法の総数は

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 90$$

となります。

●ここで 4 点

●少しの計算のみ 3 点

問題 5 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ を展開した時の x^6 の係数を求めて下さい。

配点：10 点

シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 展開した時の一般項は

$${}_6C_k (x^2)^k \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-k} = (-1)^{6-k} {}_6C_k x^{2k+k-6} = (-1)^{6-k} {}_6C_k x^{3k-6}$$

なので、 x^6 の項は $k = 4$ に相当します。従ってその係数は

$$(-1)^{6-4} {}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

です。

- 説明の不十分さ - 1 点
- 記法のマズさ - 1 点
- 計算ミス - 3 点

問題 6 正の整数全体の集合を Z とし、その部分集合 A 、 B を

A : ある整数の自乗になっているような数

B : 3 で割って余りが 1 である正の整数

とすると、集合 $A \cap \bar{B}$ はどんな数からなる集合になるでしょうか。ただし $\bar{B}$ は、 Z における B の補集合を意味するものとします。

配点：5 点

シラバス達成度目標：ア

【解答例】

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1, \quad (3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1$$

なので、3 で割って余りが 1 でない平方数は元々 3 の倍数の自乗であるものに限られます。従って $A \cap \bar{B}$ は、『3 の倍数の自乗である数』全体となります。あるいは、直接挙げれば、

$$A \cap \bar{B} = \{3^2, 6^2, 9^2, 12^2, \dots\}$$

となります。

●平方数を 3 で割った余りについて
いくらか言及されていれば 2 点 ~ 3 点

●少しの不備 4 点

●試験前に注意した様に、

『ある数の自乗になっているような数で
3 で割った余りが 1 でない数』

は答えとしては認めない。

問題 7 袋の中に白玉 6 個、赤玉 4 個が入っています。

(1) この中から同時に 5 個取り出すとき、3 個が白玉、2 個が赤玉である確率を求めて下さい。

(2) 順に 3 個の玉を取り出すとき、3 個目が赤玉である確率を求めて下さい。

配点：(1) 10 点、(2) 10 点

シラバス達成度目標：エ、オ

【解答例】 (1) 合計 10 個の中から 5 個取り出すヴァリエーションは全部で ${}_{10}C_5$ 通りあり、全て同じ確率で出ます。そのうち白玉 3 個、赤玉 2 個であるもののヴァリエーションは ${}_6C_3 \cdot {}_4C_2$ 通りありますから、求める確率は

$$\frac{{}_6C_3 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{10}{21}$$

です。

(2)

●場合分け程度までしか
出来ていないもの 3 点

●それ以前のもの
1 点 ~ 2 点

$$P[\text{赤赤赤}] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

$$P[\text{赤白赤}] = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

$$P[\text{白赤赤}] = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

$$P[\text{白白赤}] = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

●計算ミス - 3 点

●重大なミス - 5 点

●少しの計算のみ 3 点

なので、求める確率は

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{1+3+3+5}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

です。

●計算ミス、場合分けの小ミス - 3 点

●ミスが多いもの - 5 点

問題 8 2 個のサイコロを投げて出目の和を表す確率変数を Z とするとき、 Z の確率分布表を書き、その平均値と分散を求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：エ、オ、カ

【解答例】 まず出目の和ごとにその和となるヴァリエーションを調べると

出目の和	ヴァリエーション	総数
2	11	1
3	12 × 2	2
4	13 × 2, 22	3
5	14 × 2, 23 × 2	4
6	15 × 2, 24 × 2, 33	5
7	16 × 2, 25 × 2, 34 × 2	6
8	26 × 2, 35 × 2, 44	5
9	36 × 2, 45 × 2	4
10	46 × 2, 55	3
11	56 × 2	2
12	66	1

となっています。従って確率分布表は

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Z = k]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

となり、その平均値は

$$\begin{aligned} E[Z] &= \frac{(2 + 12) + (3 + 11)2 + (4 + 10)3 + (5 + 9)4 + (6 + 8)5 + 7 \cdot 6}{36} \\ &= \frac{14(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 42}{36} \\ &= \frac{14 \cdot 15 + 42}{36} \\ &= \frac{252}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

であり、分散は

$$\begin{aligned} V[Z] &= \frac{(5^2 + 5^2) + (4^2 + 4^2)2 + (3^2 + 3^2)3 + (2^2 + 2^2)4 + (1^2 + 1^2)5}{36} \\ &= \frac{50 + 64 + 54 + 32 + 10}{36} \\ &= \frac{210}{36} \\ &= \frac{35}{6} \\ &\sim 5.83 \end{aligned}$$

となります。

●分散で 4 点
計算ミス 2 点
定義のミスなど重大なミス 1 点

●分布表が正しい場合（分布表で 10 点）
根拠の明示が全くないもの - 5 点
根拠が不十分なもの - 2 点
●分布表が間違っている場合
数え方のミス（分子のミスのみ） 5 点
そもそも分母が違うような重大ミス 3 点

●平均値で 6 点
定義も計算も良いが、表にミスがあったため間違ってしまったもの 5 点
定義は良いが計算ミスがあるもの 3 点