1 (1) 全体集合を $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ とし、

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{2,4,6,8\}$$

とするとき、次の集合を求めて下さい。

$$A\cap B,\quad A\cup B,\quad A\cap\overline{B}$$

(2) 集合 C,D について

$$C\cup D=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$C\cap D=\{2,3,6\},\quad C\cap\overline{D}=\{1,8\}$$

であるとき、C,D を求めて下さい。

配点：(1) 9 点、(2) 6 点	シラバス達成度目標：ア

【解答例】　(1)

$$A\cap B=\{2,4\}$$
$$A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$$
$$A\cap\overline{B}=\{1,3\}$$

(2) $C\cup D$ を全体集合として考えます。

$$C=C\cap\left(D\cup\overline{D}\right)=(C\cap D)\cup\left(C\cap\overline{D}\right)=\{1,2,3,6,8\}$$

$$\begin{aligned}D&=D\cap\left(C\cup\overline{C}\right)\\&=(D\cap C)\cup\left(D\cap\overline{C}\right)\\&=(D\cap C)\cup\left\{\left(D\cap\overline{C}\right)\cup\left(C\cap\overline{C}\right)\right\}\\&=(D\cap C)\cup\left\{(C\cup D)\cap\overline{C}\right\}\\&=\{2,3,6\}\cup\{4,5,7\}\\&=\{2,3,4,5,6,7\}\end{aligned}$$

2 ７個の数字 1,1,1,2,2,3,3 を全部使って並べてできる７桁の整数は何個ありますか。

配点：10 点	シラバス達成度目標：イ

【解答例】　７個の箱を用意してそこに数字を１つずつ入れて行くと考えます。

まず 3 の入る箱の選び方は ${}_7\mathrm{C}_2$ 通りあり、そのそれぞれの場合に残りの５個の箱の中から 2 の入る箱を選ぶ方法は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りあります。残り３つの箱には全て 1 が入り全て確定して７桁の整数になりますから求める個数は

$${}_7\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=210$$

です。

3 $(2x-1)^7$ の展開式で x^4 の係数を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス達成度目標：ウ

【解答例】　展開したときの一般項は

$$ {}_7\mathrm{C}_m (2x)^m (-1)^{7-m} = (-1)^{7-m} 2^m {}_7\mathrm{C}_m x^m $$

ですから、これが x^4 の項であるためには $m=4$ であれば良く、その時の係数は

$$ (-1)^3 2^4 {}_7\mathrm{C}_4 = -\frac{2^4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = -560 $$

です。

4 袋の中に白玉 6 個、赤玉 4 個が入っています。この中から同時に 5 個取り出すとき、3 個が白玉、2 個が赤玉である確率を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス達成度目標：イ、エ

【解答例】　すべての結果の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_5$ であり、そのうち題意を満たすものは、白玉のヴァリエーションで ${}_6\mathrm{C}_3$ 通り、赤玉のヴァリエーションで ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りありますから、求める確率は

$$ \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{21} $$

です。

5 ある工場で 2 種類の機械 A、B を使って同じ製品を作っています。A と B の生産の割合は 3：2 であり、不良品の出る率はそれぞれ 4 %、5 %です。
　任意に 1 個の不良品を選んだときそれが機械 A による製品である確率、つまり、不良品であると云う条件の下での機械 A による製品である確率を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス達成度目標：オ

【解答例】　機械 A による製品である事象を E_A、機械 B による製品である事象を E_B、不良品である事象を E_F とします。
　まず、

$$P(E_F) = P(E_F \cap E_A) + P(E_F \cap E_B) = P_{E_A}(E_F)P(E_A) + P_{E_B}(E_F)P(E_B)$$

ですが、

$$P(E_A) = \frac{3}{5}, \quad P(E_B) = \frac{2}{5}, \quad P_{E_A}(E_F) = \frac{4}{100}, \quad P_{E_B}(E_F) = \frac{5}{100}$$

ですから

$$P(E_F) = \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{500}$$

が分かります．従って

$$P_{E_F}(E_A) = \frac{P(E_A \cap E_F)}{P(E_F)} = \frac{\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{22}{500}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

です。

6 (1) 次の確率分布表に従う確率変数 X の平均値・分散を求めて下さい。

k	1	2	3	4
$P[X=k]$	0.4	0.3	0.2	0.1

(2) ２項分布 $B(4, 0.5)$ の確率分布表を書いて下さい。

配点：(1) 10 点、(2) 5 点	シラバス達成度目標：カ

【解答例】　(1)

$$E[X] = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.4 = 2$$
$$Var[X] = E\left[(X-2)^2\right] = 1^2 0.4 + 1^2 0.2 + 2^2 0.1 = 1$$

(2) X が２項分布 $B\,(4, 0.5)$ に従うならば、

$$P[X=k] = {}_4\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = {}_4\mathrm{C}_k \frac{1}{2^4}$$

です。それぞれ計算すると

$$P[X=0] = \frac{1}{2^4} = 0.0625$$
$$P[X=1] = {}_4\mathrm{C}_1 \frac{1}{2^4} = \frac{4}{2^4} = 0.25$$
$$P[X=2] = {}_4\mathrm{C}_2 \frac{1}{2^4} = \frac{6}{2^4} = 0.375$$
$$P[X=3] = {}_4\mathrm{C}_3 \frac{1}{2^4} = \frac{4}{2^4} = 0.25$$
$$P[X=4] = \frac{1}{2^4} = 0.0625$$

です。

k	0	1	2	3	4
$P[X=k]$	$\frac{1}{2^4}$ $= 0.0625$	$\frac{4}{2^4}$ $= 0.25$	$\frac{6}{2^4}$ $= 0.375$	$\frac{4}{2^4}$ $= 0.25$	$\frac{1}{2^4}$ $= 0.0625$

7 2 つの事象 A, B について、A と B が互いに独立であれば、A と $\overline{B}$ も互いに独立であることを証明して下さい。

配点：5 点	シラバス達成度目標：エ

【解答例】　A, B の独立性から

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A)\{1 - P(B)\} = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ですが、

$$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$$

なので、

$$P(A)P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$$

となって題意を得ます。

8 1 つの箱に赤玉 4 個と白玉 5 個が入っています。A、B 2 人が A から始めて交互に箱の中から玉を 1 つ取り出し、先に白玉を取り出した者を勝ちとするとき、A の勝つ確率を求めて下さい。ただし、非復元抽出とします。

配点：15 点	シラバス達成度目標：エ、オ

【解答例】　A が勝つ場合は、出玉が順に（赤を R、白を W で表します)、

$$W, \quad RRW, \quad RRRRW$$

である場合があり、それぞれの確率を求めれば

$$P(W) = \frac{5}{9}, \quad P(RRW) = \frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7}, \quad P(RRRRW) = \frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{5}{5}$$

なので、A が勝つ確率は

$$\begin{aligned}\frac{5}{9} + \frac{5\cdot4\cdot3}{9\cdot8\cdot7} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5} &= \frac{5\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 + 5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot5 + 5\cdot4\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}\\ &= \frac{5\cdot2\cdot7 + 5\cdot3 + 1}{9\cdot2\cdot7}\\ &= \frac{86}{126}\\ &= \frac{43}{63}\end{aligned}$$

となります。