問題 1 あるクラスの 40 人の学生のうち、数学が嫌いな学生が 22 人おり、数学も英語も好きな学生が 9 人、数学も英語も嫌いな学生が 8 人いました。では英語が好きな学生は何人いるでしょうか。ただし、各学生は数学・英語それぞれについて好きか嫌いであるかのどちらかであると仮定します。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　数学が好きな学生の集合を M、英語の好きな学生の集合を E とし、集合の要素の個数を $n(M)$ などで表すことにします。分かっていることは

$$n\left(\overline{M}\right) = 22, \quad n(M \cap E) = 9, \quad n\left(\overline{M} \cap \overline{E}\right) = 8$$

です。すると、まず

$$\begin{aligned} n\left(\overline{M}\right) &= n\left(\overline{M} \cap E\right) + n\left(\overline{M} \cap \overline{E}\right) \\ 22 &= n\left(\overline{M} \cap E\right) + 8 \\ 14 &= n\left(\overline{M} \cap E\right) \end{aligned}$$

であり、これによって

$$\begin{aligned} n(E) &= n(E \cap M) + n\left(E \cap \overline{M}\right) \\ &= 9 + 14 \\ &= 23 \end{aligned}$$

が分かります。

□

問題 2 (1) 10 を互いに異なる正の整数の和で表す方法は何通りありますか。

(2) 12 を 5 で割って余りが ± 1 であるような正の整数（1,4,6,9,11）の和で表す方法は何通りありますか。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1)

$$\begin{aligned} 10 &= 10 \\ &= 9 + 1 \\ &= 8 + 2 \\ &= 7 + 3 \\ &= 7 + 2 + 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 6 + 3 + 1 \\ &= 5 + 4 + 1 \\ &= 5 + 3 + 2 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

以上 10 通りです。

(2)

$$
\begin{aligned}
12 &= 11+1 \\
&= 9+1+1+1 \\
&= 6+6 \\
&= 6+4+1+1 \\
&= 6+1+1+1+1+1+1 \\
&= 4+4+4 \\
&= 4+4+1+1+1+1 \\
&= 4+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

以上 9 通りです。　□

問題 **3**　$\left(2x^5+\frac{3}{x^2}\right)^n$ を展開した時に x^{11} が存在するような正の整数 n の最小値を求め、その時の x^{11} の係数を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　展開式は

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(2x^5)^j(3x^{-2})^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^j3^{n-j}x^{7j-2n}$$

となりますから、この中に x^{11} があるための条件は $7j-2n=11$ となる $0\leq j\leq n$ が存在することです。

変形すると、少なくとも $11+2n$ が 7 の倍数でなければならず、$n=5$ の時がその最小の n です。このとき $j=3$ とすれば確かに条件を満たしていますから、求める n の最小値は 5 であり、そのときの x^{11} の係数は

$$\binom{5}{3}2^3 3^2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 2^3 3^2=720$$

です。　□

問題 **4** 袋の中に白玉が４個と黒玉が５個入っています。ここから３個取り出すとき、３つとも同じ色である確率を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　取り出した結果のヴァリエーションは 9 個の玉のうちの３個を（同時に、従って順序は付けずに組として）取り出すわけですから ${}_9\mathrm{C}_3$ 通りありますが、このうち 3 個とも同色である様な結果のヴァリエーションは、まず全て白玉の場合で ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り、全て黒玉の場合で ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあります。従って求める確率 P は

$$P = \frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} + \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{24+60}{9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{6}$$

です。

□

問題 **5** ある工場では従業員の 75 ％が男性で、男性のうち 40 ％の人が社宅に住み、女性の中の 20 ％の人が社宅に住んでいます。社宅に住んでいる従業員の中からくじで 1 名選ぶとき、その従業員が男性である確率を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　従業員の中から 1 名選ぶ試行に於いて、男性である事象を E_m、女性である事象を E_f、社宅に住んでいる事象を E_s としましょう。

問題文に与えられているデータから分かる事は

$$P(E_m) = 0.75, \quad P(E_f) = 0.25, \quad P_{E_m}(E_s) = 0.4, \quad P_{E_f}(E_s) = 0.2$$

ですから、

$$\begin{aligned}
P_{E_s}(E_m) &= \frac{P(E_s \cap E_m)}{P(E_s)} \\
&= \frac{P(E_s \cap E_m)}{P(E_s \cap E_m) + P(E_s \cap E_f)} \\
&= \frac{P_{E_m}(E_s)P(E_m)}{P_{E_m}(E_s)P(E_m) + P_{E_f}(E_s)P(E_f)} \\
&= \frac{0.4 \times 0.75}{0.4 \times 0.75 + 0.2 \times 0.25} \\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

です。

□

問題 **6** 箱の中にくじが 6 枚入っていて、そのうち 2 枚が当たりです。 1 枚ずつくじを引いてゆく（引いたくじは戻しません）ゲームをし、2 枚目の当たりが出たらゲームを終わりとします。

　ゲームが終了するまでに引いたくじの枚数を表す確率変数を X とするとき、X の期待値と分散を求めて下さい。

配点：15 点	シラバス到達目標：イ、ウ

【解答例】　当たり（A）外れ（H）の経過を AHHA などで表して確率を計算すると

$$P[X=1]=0$$

$$P[X=2]=P[AA]=\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

$$P[X=3]=P[AHA]+P[HAA]=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned}P[X=4]&=P[AHHA]+P[HAHA]+P[HHAA]\\&=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{3}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[X=5]&=P[AHHHA]+P[HAHHA]+P[HHAHA]+P[HHHAA]\\&=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{4}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[X=6]&=P[AHHHHA]+P[HAHHHA]\\&\qquad+P[HHAHHA]+P[HHHAHA]+P[HHHHAA]\\&=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\\&\quad+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{5}{15}\end{aligned}$$

となりますから、確率分布表は

n	2	3	4	5	6
$P[X=n]$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

となります。

　従って期待値は

$$E[X]=\frac{2+6+12+20+30}{15}=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}\sim 4.67$$

であり、

　分散は

$$\begin{aligned}Var[X]&=E[X^2]-E[X]^2\\&=\frac{4+18+48+100+180}{15}-\left(\frac{14}{3}\right)^2\\&=\frac{350}{15}-\frac{196}{9}\\&=\frac{210-196}{9}\\&=\frac{14}{9}\sim 1.56\end{aligned}$$

です。　□

問題 **7**　A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 2 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

配点：5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている事象を E_n としますと、

$$\begin{aligned} P_n &= P(E_n) \\ &= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap \overline{E_{n-1}}) \\ &= P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(E_n) + P(\overline{E_{n-1}})P_{\overline{E_{n-1}}}(E_n) \\ &= P_{n-1}P_{E_{n-1}}(E_n) + (1-P_{n-1})\,P_{\overline{E_{n-1}}}(E_n) \\ &= P_{n-1}\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2} + (1-P_{n-1})\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{2}(1-P_{n-1}) \\ P_n &= \frac{1}{6}P_{n-1} + \frac{1}{2} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

と云う漸化式が成り立っている事が分かります。$P_1 = \frac{2}{3}$ ですからこの初期値の元で漸化式を解けば答えが求まります。

この漸化式に対応した同次漸化式：

$$P_n - \frac{1}{6}P_{n-1} = 0$$

の一般解は $P_n = C\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ですから（C は任意の定数）、元の漸化式 $(*)$ の解の一つを見つけてやれば一般解が求まります。

P_j を含まない項が定数ですから、定数数列 $Q_n = k$ が非同次漸化式 $(*)$ を満たすと仮定すれば

$$k = \frac{k}{6} + \frac{1}{2}, \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{3}{5}$$

であることが分かります。従って非同次漸化式 $(*)$ の一般解は

$$P_n = \frac{C}{6^n} + \frac{3}{5}$$

です。これが初期値 $P_1 = \frac{2}{3}$ を満たす様に定数 C を求めると

$$\frac{2}{3} = \frac{C}{6} + \frac{3}{5}, \quad \text{従って} \quad C = \frac{2}{5}$$

が分かりますから結局求める確率 P_n は $P_n = \frac{2}{5\cdot 6^n} + \frac{3}{5}$ となります。　□

問題 **8** 1 から 9 までの数字がそれぞれ書いてあるカードが 9 枚あります。この中から 3 枚のカードを取り出して書かれた数字の小さい方から順に X, Y, Z とします。

(1) X, Y, Z が連続した数字である確率は幾らですか。

(2) 確率 $P[X = 5]$ を求めて下さい。

配点：(1)15 点、(2)10 点	シラバス到達目標：イ、ウ

【解答例】　(1) 連続数であるヴァリエーションは 1.2.3 から 7.8.9 まで 7 通りありますから求める確率は

$$\frac{7}{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{12}$$

です。

(2) 3 枚とってその中の最小値が 5 であるようなヴァリエーションは、5 より大きなもの $9 - 5 = 4$ 個の中から 2 つ選ぶ組み合わせの数 ${}_4\mathrm{C}_2$ だけありますから、

$$P[X = 5] = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{14}$$

となります。

□