

問題 1 40 人のクラスで、微分方程式の単位を落とした学生は 12 人、確率の単位を落とした学生は 19 人、両方単位を取得した学生は 19 人でした。このクラスで微分方程式と確率の両方の単位を落とした学生は何人ですか。

配点：10 点

シラバス到達目標：ア

【解答例】 微分方程式を落とした学生の集合を D 、確率を落とした学生の集合を P とすると、

$$19 = n(\overline{D} \cap \overline{P}) = n(\overline{D \cup P}) = 40 - n(D \cup P)$$

から

$$n(D \cup P) = 21$$

です。従って

$$21 = n(D \cup P) = n(D) + n(P) - n(D \cap P) = 31 - n(D \cap P)$$

となって

$$n(D \cap P) = 10$$

が分かります。両方落とした学生は 10 人です。

□

問題 2 7 を正の整数の和で書き表す方法は何通りありますか。ただし、『1 個の和』も認めるものとし、足す順番は無視することにします。

配点：10 点

シラバス到達目標：ア

【解答例】

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \\ &= 6 + 1 \\ &= 5 + 2 \\ &= 5 + 1 + 1 \\ &= 4 + 3 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 4 + 1 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 \\ &= 3 + 2 + 2 \\ &= 3 + 2 + 1 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 2 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

従って 15 通りあります。

□

問題 3 $(2x + \frac{1}{3})^{30}$ の展開式について以下の問いに教えてください。

(1) 展開した時の x^j の係数を 2 項係数 ${}_nC_m$ を使って表してください。

(2) 展開した時の係数のうち、最も大きいものは x の何乗の係数ですか。係数そのものを求める必要はありません。

配点：(1)10 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$$\left(2x + \frac{1}{3}\right)^{30} = \sum_{j=0}^{30} {}_{30}C_j (2x)^j \left(\frac{1}{3}\right)^{30-j} = \sum_{j=0}^{30} {}_{30}C_j 2^j 3^{j-30} x^j$$

ですから求める係数は ${}_{30}C_j 2^j 3^{j-30}$ です。

(2) x^j の係数を R_j とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{R_{j+1}}{R_j} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{{}_{30}C_{j+1} 2^{j+1} 3^{j+1-30}}{{}_{30}C_j 2^j 3^{j-30}} \geq 1 \\ &\frac{\frac{30!}{(j+1)!(30-j-1)!} 6}{\frac{30!}{j!(30-j)!}} \geq 1 \\ &\frac{6(30-j)}{j+1} \geq 1 \\ &179 \geq 7j \\ &\frac{179}{7} \geq j \end{aligned}$$

となりますから、 $\frac{179}{7} \approx 25.57$ によれば、 $j = 26$ の時が最大であることが分かります。

係数が最大になるのは x^{26} です。□

問題 4 4 つの玉を 3 つの箱に入れる入れ方の総数は何通りあるか次のそれぞれの場合に教えてください。ただし、玉が 1 つも入らない箱があっても構いませんが、どの箱にも 3 個までしか入らないものとします。

(1) 玉にも箱にも区別が無い場合。

(2) 玉にはそれぞれ異なった色が塗られていて区別されるが、箱に区別は無い場合。

配点：(1)5 点、(2)10 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) この場合玉の個数だけが問題となります。すると各箱に入れる玉の数の組み合わせは

$$(3, 1, 0), \quad (2, 2, 0), \quad (2, 1, 1)$$

の 3 通りしかありません。

(2) 上で求めた組み合わせのそれぞれについて玉を区別することになります。

(3, 1, 0) の場合は、単独で入る 1 個の選び方で 4 通りあります。

(2, 2, 0) の場合は、4 つの玉のうちある特定の玉を固定して、この玉と一緒に入る玉の選び方で 3 通りあります。

(2, 1, 1) の場合は、一緒に入る 2 個の選び方で ${}_4C_2 = 6$ 通りありますから、合計で 13 通りです。□

問題 5 ある会社は、A、B 社から同じ部品を 2 : 5 の比率で購入しています。A、B 社から納入された部品にはそれぞれ 2.5 %、1 % の割合で不良品が含まれていることが知られています。

このとき納入された部品全体から任意に取り出した 1 個が不良品である確率を求めてください。

配点：10 点 シラバス到達目標：イ

【解答例】 任意に取り出した 1 個が A 社の製品である事象を E_A 、B 社の製品である事象を E_B 、不良品である事象を E_F とします。

分かっていることは

$$P[E_A] = \frac{2}{7}, \quad P[E_B] = \frac{5}{7}, \quad P_{E_A}[E_F] = \frac{2.5}{100}, \quad P_{E_B}[E_F] = \frac{1}{100}$$

です。

従って

$$\begin{aligned} P[E_F] &= P[E_F \cap E_A] + P[E_F \cap E_B] \\ &= P_{E_A}[E_F]P[E_A] + P_{E_B}[E_F]P[E_B] \\ &= \frac{2.5}{100} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{100} \cdot \frac{5}{7} \\ &= \frac{10}{700} \\ &= \frac{1}{70} \\ &\approx 0.0143 \end{aligned}$$

です。

□

問題 6 コインを 3 回投げて表の出た回数を X 、表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値を Y とします。

(1) X の分布表を書いて下さい。ただし確率の欄は全て既約分数（もう約分できない状態まで約分した分数）で書いてください。

(2) XY の期待値と分散を求めて下さい。

配点：(1)10 点、(2)5 点 シラバス到達目標：イ、ウ

【解答例】 (1) X は二項分布 $B(3, 0.5)$ に従います。

$$P[X = k] = {}_3C_k 0.5^k (1 - 0.5)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

分布表は

k	0	1	2	3
$P[X = k]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

となります。

(2) $Y = |X - (3 - X)| = |2X - 3|$ なので

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[X|2X - 3|] \\ &= \sum_{k=0}^3 k|2k - 3|P[X = k] \\ &= 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{18}{8} \\ &= \frac{9}{4} \\ &= 2.25 \end{aligned}$$

です。また、

$$Var[XY] = E[X^2 Y^2] - E[XY]^2$$

でしたから、

$$Var[XY] = E[X^2 (2X - 3)^2] - \left(\frac{18}{8}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^3 k^2(2k-3)^2 P[X=k] - \left(\frac{18}{8}\right)^2 \\
&= 0 + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 81 \cdot \frac{1}{8} - \left(\frac{18}{8}\right)^2 \\
&= \frac{96}{8} - \frac{81}{16} \\
&= \frac{111}{16} \\
&\approx 6.94
\end{aligned}$$

が分かります。

問題 7 A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 3 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス到達目標：イ

【解答例】 $\{P_n\}$ は漸化式：

$$P_n = \frac{{}_5C_3}{{}_6C_3} P_{n-1} + \frac{{}_3C_2}{{}_4C_3} (1 - P_{n-1})$$

□

を満たしています。初期値は $P_0 = 1$ です。

漸化式を整理すると

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{6!}{3!3!}} P_{n-1} + \frac{3}{4} (1 - P_{n-1}) \\
&= \frac{3}{6} P_{n-1} + \frac{3}{4} (1 - P_{n-1}) \\
&= -\frac{1}{4} P_{n-1} + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

ですが、これが

$$P_n - a = -\frac{1}{4} (P_{n-1} - a)$$

の形に変形できると仮定すると、

$$P_n = -\frac{1}{4} P_{n-1} + \frac{5}{4} a$$

ですから $a = \frac{3}{5}$ であれば良いことが分かるので、漸化式は

$$P_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4} \left(P_{n-1} - \frac{3}{5} \right)$$

と変形されます。すると $Q_n = P_n - \frac{3}{5}$ は公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列ですから

$$Q_n = \frac{1}{(-4)^n} Q_0 = \frac{1}{(-4)^n} \left(P_0 - \frac{3}{5} \right) = \frac{2}{5 \cdot (-4)^n}$$

が分かり、従って

$$P_n = Q_n + \frac{3}{5} = \frac{2}{5 \cdot (-4)^n} + \frac{3}{5}$$

です。

□

問題 8 箱の中に赤玉が 2 個、白玉が 7 個入っています。A さんと B さんが、A さんから始めて交互に 1 つの玉を取り出して元に戻します。

先に赤玉を出した人の勝ちであるとして、B さんが勝つ確率を求めてください。

配点：10 点 シラバス到達目標：イ

【解答例】 B さんが $2n$ 回目に勝つ確率は

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{2n-1} \frac{2}{9}$$

ですから、

$$\begin{aligned} (\text{B さんが勝つ確率}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{2n-1} \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{2n} \\ &= \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{2n} \\ &= \frac{14}{9^2} \frac{1}{1 - \frac{7^2}{9^2}} \\ &= \frac{14}{9^2 - 7^2} \\ &= \frac{14}{32} \\ &= \frac{7}{16} \\ &= 0.4375 \end{aligned}$$

です。

□