問題 1 ガルーラというキャラクターの『ピヨピヨパンチ』という技は、

1 回の攻撃機会において、コインを 3 回投げて、(表の枚数) × 10 のダメージ

を相手に与えます。

(1) ガルーラが 1 回の攻撃機会において『ピヨピヨパンチ』によって相手に与えるダメージを X として、X の確率分布表を書いてください。

(2) X の平均と分散を求めてください。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】

$$P[X=0]=\frac{1}{8},\quad P[X=10]=\frac{3}{8},\quad P[X=20]=\frac{3}{8},\quad P[X=30]=\frac{1}{8}$$

ですから、分布表は

k	0	10	20	30
$P[X=k]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

となります。

(2)

$$\begin{aligned} E[X] &= 0\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{3}{8}+20\cdot\frac{3}{8}+30\cdot\frac{1}{8} \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X-15)^2] \\ &= (-15)^2\frac{1}{8}+(-5)^2\frac{3}{8}+5^2\frac{3}{8}+15^2\frac{1}{8} \\ &= 75 \end{aligned}$$

□

問題 2 40 人のクラスで、微分方程式の単位を落とした学生は 5 人、確率の単位を落とした学生は 3 人、両方単位を取得した学生は 34 人でした。このクラスで微分方程式と確率の両方の単位を落とした学生は何人ですか。

配点：10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　少なくともどちらかの単位を落とした学生は６人おり、そのうちの５人は微分方程式を落としており、残りの１人は確率だけを落としています。

従って両方落とした学生は２人です。　□

問題 3 (1) 8 を正の奇数の和で表す方法は何通りありますか。
　ただし $1+1+3+3$ のように同じ奇数を何度使っても良く、足す順番は無視します。

　(2) 8 を相異なる正の整数の和で表す方法は何通りありますか。ただし、『１個の和 $8=8$』も和として認めることとし、足す順番は無視します。

配点：(1)5 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1) の総数を $O(8)$、(2) の総数を $D(8)$ とします。

$O(8)$	$D(8)$	
$8=7+1$	$8=8$	(1)
$=5+3$	$=7+1$	(2)
$=5+1+1+1$	$=6+2$	(3)
$=3+3+1+1$	$=5+3$	(4)
$=3+1+1+1+1+1$	$=5+2+1$	(5)
$=1+1+1+1+1+1+1+1$	$=4+3+1$	(6)

(1) 6 通り。
(2) 6 通り。

□

問題 4 $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^{50}$ の展開式について以下の問いに答えてください。

　(1) 展開した時の x^j の係数を２項係数 ${}_n\mathrm{C}_m$ を使って表してください。

　(2) 展開した時の係数のうち、最も大きいものは x の何乗の係数ですか。係数そのものを求める必要はありません。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】　(1) x^j の係数を C_j とします。

$$C_j = {}_{50}\mathrm{C}_j 3^j \left(\frac{1}{2}\right)^{50-j} = {}_{50}\mathrm{C}_j 3^j 2^{j-50} = {}_{50}\mathrm{C}_j 2^{-50} 6^j$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{C_{j+1}}{C_j} &= \frac{{}_{50}\mathrm{C}_{j+1}2^{-50}6^{j+1}}{{}_{50}\mathrm{C}_j 2^{-50}6^j} \\ &= \frac{\frac{50!}{(50-j-1)!(j+1)!}6}{\frac{50!}{(50-j)!j!}} \\ &= \frac{6(50-j)}{j+1}\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}C_{j+1} > C_j \iff 6(50-j) &> j+1 \\ 299 &> 7j \\ \frac{299}{7} &> j\end{aligned}$$

となり、$j=43$ のときが最大であることが分かります。　□

問題 5 5 つの玉を 3 つの箱に入れる入れ方の総数は何通りあるか次のそれぞれの場合に答えて下さい。ただし、玉が 1 つも入らない箱があっても構いませんが、どの箱にも 3 個までしか入らないものとします。

(1) 玉に区別はないが、箱には区別がある場合。

(2) 玉は区別されるが、箱に区別は無い場合。

配点：(1)10 点、(2)10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(1) 区別のない玉を、最大３個の３グループに分ける方法は

$$(0,2,3),\quad (1,1,3),\quad (1,2,2)$$

の 3 通りあり、箱に区別がある場合、第 1 の方法は箱の選び方で 6 通り、第２・３の方法は 3 通りずつありますから、全てで 12 通りあります。

(2) 第 1 の分け方は、２つで一緒に入る球の選び方で ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通りです。
第 2 の分け方は、３つ一緒に入る球の選び方で ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りあります。
最後に第 3 の分け方は、１つだけで入る球の選び方が 5 通りあって、そのそれぞれに対して残りの４つを２個ずつに分ける選び方が $\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{2} = 3$ 通りずつありますから、全部で 15 通りあります。

これらを全て合計すると、35 通りです。 □

問題 6 大小２つのサイコロを 1 回振ったときの大サイコロの出目を L、小サイコロの出目を S とします。

(1) L を 3 で割った余りが 0、1、2 である確率をそれぞれ求めてください。

(2) L, S それぞれを 3 で割った余りが等しい確率を求めてください。

(3) $2L+S$ が 3 の倍数である確率を求めてください。

配点：(1)4 点、(2)3 点、(3)3 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　(1)

$$P[L \text{ を 3 で割った余りが } 0] = P[L=3,6] = \frac{1}{3}$$
$$P[L \text{ を 3 で割った余りが } 1] = P[L=1,4] = \frac{1}{3}$$
$$P[L \text{ を 3 で割った余りが } 2] = P[L=2,5] = \frac{1}{3}$$

(2) 余りが等しくなる出方は

$$(L,S) = (3,3),(3,6),(6,3),(6,6),(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)$$

の 12 通りですから、求める確率は $\frac{12}{6^2} = \frac{1}{3}$ です。

(3) $2L+S$ が 3 の倍数となることは、L, S を 3 で割った余りが等しいことと同値ですから、確率は $\frac{1}{3}$ です。 □

問題 7 新型コロナウイルス感染症に対して PCR 検査をすると、感染者が陽性と判定される確率（感度）は 70%です。一方、非感染者が陰性と判定される確率（特異度）は 99%です。また、今回問題となっている母集団における感染者の割合は $\frac{1}{5000}$ であると考えられています。

この母集団から無作為に選ばれた A さんが、PCR 検査により陽性と判定されました。このとき、A さんが新型コロナウイルスに感染している確率を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】　無作為に選ばれた人物が感染者である事象を D、感染者でない事象を $\overline{D}$、PCR 検査で陽性である事象を Y、陰性である事象を N とします。

問題文から分かることは

$$P_D(Y) = \frac{70}{100}, \quad P_{\overline{D}}(N) = \frac{99}{100}, \quad P(D) = \frac{1}{5000}$$

です。

感染の有無＼検査結果	陽性	陰性	合計
感染	$\frac{1}{5000} \cdot \frac{70}{100}$	$\frac{1}{5000} \cdot \frac{30}{100}$	$\frac{1}{5000}$
非感染	$\frac{4999}{5000} \cdot \frac{1}{100}$	$\frac{4999}{5000} \cdot \frac{99}{100}$	$\frac{4999}{5000}$
合計	$\frac{5069}{500000}$	$\frac{494931}{500000}$	1

従って、求める条件付き確率は以下の通りです：

$$\begin{aligned} P_Y(D) &= \frac{P(Y \cap D)}{P(Y)} \\ &= \frac{\frac{70}{100} \cdot \frac{1}{5000}}{\frac{70}{100} \cdot \frac{1}{5000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{4999}{5000}} \\ &= \frac{70}{5069} \\ &\approx 0.014 \end{aligned}$$

□