

問題 1 12 を偶数個の互いに異なる正の整数の和で表す方法の総数 E_{12} 、奇数個 (1 個の場合も含めます) の互いに異なる正の整数の和で表す方法の総数 O_{12} をそれぞれ求めてください。

配点：10 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】

E_{12}	O_{12}	
$12 = 11 + 1$	$12 = 12$	(1)
$= 10 + 2$	$= 9 + 2 + 1$	(2)
$= 9 + 3$	$= 8 + 3 + 1$	(3)
$= 8 + 4$	$= 7 + 4 + 1$	(4)
$= 7 + 5$	$= 7 + 3 + 2$	(5)
$= 6 + 3 + 2 + 1$	$= 6 + 5 + 1$	(6)
$= 5 + 4 + 2 + 1$	$= 6 + 4 + 2$	(7)
	$= 5 + 4 + 3$	(8)

従って

$$E_{12} = 7, \quad O_{12} = 8$$

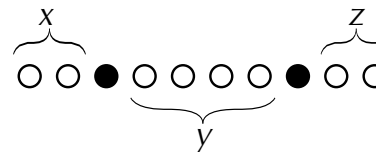
です。

□

問題 2 方程式： $x + y + z = 8$ の非負整数解は何組ありますか。

配点：10 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 白丸 8 個と黒丸 2 個の作る順列に対して、左の黒丸よりも左にある白丸の個数を x 、2 つの黒丸の間にある白丸の個数を y 、右の黒丸よりも右にある白丸の個数を z とすれば、問題の方程式の 1 つの非負整数解が得られます。



逆に、1 つの解に対して、まず白丸を x 個並べ、その右に黒丸 1 個を置き、更にその右に白丸を y 個、黒丸 1 個、白丸 z 個の順に並べれば、白丸 8 個、黒丸 2 個の順列が出来上がり、この対応と先の対応は互いに逆対応になっており、1 対 1 です。

従って、問題の方程式の非負整数解の全体と順列の全体は 1 対 1 に対応しており、非負整数解の個数は順列の総数：

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

に一致します。

□

問題 3 座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と言います。座標平面において連立不等式

$$D : y \leq -\frac{1}{3}x^2 + 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

によって表される領域 D に含まれる格子点の総数を求めてください。

配点：10 点 | シラバス到達目標：ア

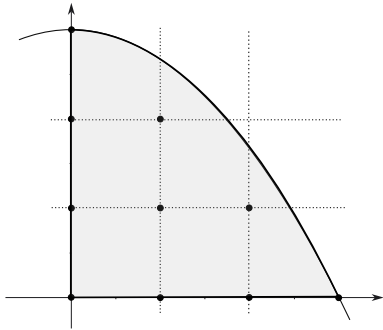
【解答例】

$$D_1 : y \leq -\frac{1}{3}x^2 + 3, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

x 座標で場合分けして数えれば、格子点は

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)$

の 10 個です。



□

問題 4 (1) ${}_7P_3$ の値を求めてください。

(2) $1, 2, 2, 3, 4, 4$ を並べて出来る 6 桁の数は何種類ありますか。

配点：(1)5 点、(2)5 点 | シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

(2) $2, 4$ を全部区別すれば $6!$ 通りあり、 2 の並べ方 2 種類と 4 の並べ方 2 種類がかぶっていますから、求める 6 桁の数の総数は以下の通りです：

$$\frac{6!}{2 \cdot 2} = 180$$

□

問題 5 黒玉 1 つ、青玉 2 つ、赤玉 3 つを円形に並べる方法は何通りありますか。
ただし、回転して同じものは区別しません。

配点：10 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 黒玉が 12 時の位置に来るようにして比較検討します。

残りの 5 個の中で、時計回りを見て何番目と何番目が青か、そのヴァリエーションは、 $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ 通りです。 □

問題 6 (1) ${}_{10}C_3$ の値を求めてください。

(2) $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ の展開式で x^9 の係数を求めて下さい。

配点：(1)5 点、(2)5 点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1)

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

(2) 展開したときの一般項は

$${}_6C_m (x^2)^m \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-m} = (-1)^{6-m} {}_6C_m x^{3m-6}$$

ですから、これが x^9 の項であるためには $m = 5$ であれば良く、その時の係数は

$$(-1)_6C_5 = -6$$

です。 □

問題 7 10人の学生を次のように3グループに分ける方法は何通りありますか。

- (1) Aグループに3人、Bグループに4人、Cグループに3人に分ける。
- (2) グループに名前をつけずに3人、4人、3人に分ける。

配点：(1)10点、(2)5点 シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) まずAグループの3人の選び方は ${}_{10}C_3$ 通りあり、そのそれぞれの場合について、残りの7人の中からBグループの4人の選び方が ${}_7C_4$ 通りずつあります。残りの3人はCグループに自動的に配属されます。

$${}_{10}C_3 \cdot {}_7C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4200$$

(2) グループに名前をつけない場合、3人からなるA、Cの2グループがグループごとに入れ替わっているものは区別されません。従ってその可能性はCグループのメンバーを固定するごとに2通りありますから求める総数は(1)の結果を2で割って2100通りです。 □

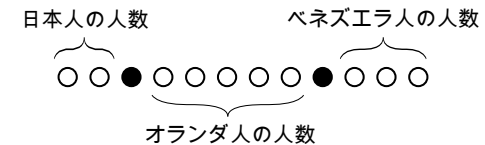
問題 8 日本人、オランダ人、ベネズエラ人が合計で10人いるとしたとき、国籍ごとの人数の組み合わせの可能性は何通りありますか。

配点：10点 シラバス到達目標：ア

【解答例】

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

【別解その1】 白丸10個と黒丸2個を並べる方法は ${}_{12}C_2 = 66$ 通りあり、



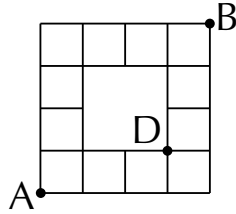
その一つ一つの並びについて、2つのうち左側にある黒丸よりも左側にある白丸の個数が日本人の人数、2つの黒丸の間にある白丸の個数がオランダ人の人数、右側の黒丸よりも右側にある白丸の個数がベネズエラ人の人数であると解釈すれば、この白丸・黒丸の並び全体と国籍の(種類の)選び方の全体が1対1に対応しますから、求める選び方の総数は66通りです。

【別解その2 各国籍の人が少なくとも1名ずつはいると考えた場合】 各国籍の人が最低でも1名ずついるとした場合、その3名以外の残りの7人は3つの国籍から0人を含めて自由に選べます。従って

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

通りです。 □

問題 9 下図の経路について、以下の問いに教えてください。

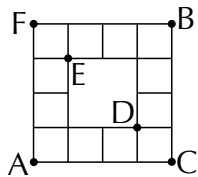


- (1) 地点 A から地点 D を通って地点 B へ至る最短経路の総数を求めてください。
- (2) 地点 A から地点 B へ至る最短経路の総数を求めてください。

配点：(1)10 点、(2)5 点 | シラバス到達目標：ア

【解答例】 (1) D を通る最短経路は、 D までが 4 通り、 D からが 4 通り、合計で 16 通りあります。

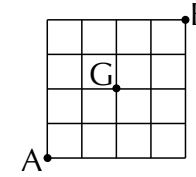
(2) A から B まで最短経路で行く場合、下図の C, D, E, F のうちいずれか 1 つの点だけを通過します：



C, F を通る最短経路はそれぞれ 1 通りずつしかありません。 D を通る最短経路は (1) で見た通り 16 通りあり、 E を通る場合も同じです。

以上により、この場合の最短経路の数は 34 です。

【別解】 図の経路を考えて、 A から B へ行く最短経路は



$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

通りあり、そのうち G を通る最短経路は

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 36$$

通りです。

この経路で G を通らない最短経路は問題の経路における A から B へ至る最短経路に一致しますから、求める総数は

$$70 - 36 = 34$$

です。

□