問題 1 1 から 100 までの自然数の集合 U を全体集合として考えます。そのうち 5 の倍数の集合を A、7 の倍数の集合を B とするとき、次の集合の要素の個数を求めて下さい。

$$n(A), \quad n(B), \quad n(A \cup B), \quad n\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

配点：20 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】

$$n(A) = 20$$

$$n(B) = 14$$

$$n(A \cup B) = 20 + 14 - 2 = 32$$

$$n\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = n\left(\overline{A \cup B}\right) = 68.$$

□

問題 2 ２つのサイコロを 1 回振ったとき、以下の確率を求めてください。

(1) ２つの出目の和が偶数である確率。

(2) ２つの出目の最大値が奇数である確率。

(3) ２つの出目の一方が他方の倍数になる確率。

配点：(1)5 点、(2)5 点、(3)5 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

(1) 2 つのサイコロを区別して、サイコロ 1 号の出目が m、サイコロ 2 号の出目が n であることを (m, n) と表します。すると出目の合計が偶数であるのは以下の：

$$(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),$$

$$(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)$$

18 通りですから、確率は $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ です。

(2) 同様に表して出目の最大値が奇数であるのは

$$(1,1),(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),$$

$$(3,3),(3,5),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)$$

の 15 通りなので、求める確率は $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12} \approx 0.417$ です。

(3) 一方が他方の倍数であるものは

$$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),$$

$$(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)$$

ですから、確率は $\dfrac{22}{36} = \dfrac{11}{18} \approx 0.611$ です。 □

問題 3 $\left(x^2+\dfrac{2}{3x}\right)^8$ を展開したときの係数について、以下の問に答えてください。

(1) 展開したときの x^{13} の係数を求めてください。

(2) 展開式の中で最も大きな係数を答えてください。

配点：(1)10 点、(2)5 点	シラバス到達目標：ア

【解答例】

(1)

$$\left(x^2+\frac{2}{3x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k(x^2)^k\left(\frac{2}{3x}\right)^{8-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{8}{}_8\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k}x^{3k-8}$$

$3k-8=13$ となるのは $k=7$ のときであり、係数は

$${}_8\mathrm{C}_7\left(\frac{2}{3}\right)^1=8\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$$

です。

(2) $k=0,1,\ldots,7$ のとき

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k-1}}{{}_8\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k}}=\frac{\frac{8!}{(k+1)!(8-k-1)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k-1}}{\frac{8!}{k!(8-k)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k}}$$
$$=\frac{(8-k)3}{(k+1)2}$$

ですから、

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k-1}}{{}_8\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^{8-k}}\lesseqqgtr 1\iff\frac{(8-k)3}{(k+1)2}\lesseqqgtr 1$$
$$\iff 24-3k\lesseqqgtr 2k+2$$
$$\iff 22\lesseqqgtr 5k$$
$$\iff \frac{22}{5}\lesseqqgtr k$$

となっています。

従って x^{3k} の係数を L_k とすると、

$$L_1<L_2<L_3<L_4<L_5>L_6>L_7>L_8$$

となっており、最大の係数は $k=5$ のときであってそれは

$${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{2^3}{3^3}=\frac{448}{27}$$

です。 □

問題 4 赤玉 2 個、白玉 6 個の入っている袋と、赤玉 3 個、白玉 9 個の入っている袋からそれぞれ 2 個ずつの玉を同時に取り出すとき、赤玉が合計 3 個出る確率を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】

第 1 の袋をＡ、第 2 の袋をＢと呼ぶ事にします。赤玉 3 個の出自のヴァリエーションは A から 1 個、B から 2 個の場合と逆の場合があります。

そこで、Ａから n 個の赤玉を引く事象を A_n、Ｂから n 個の赤玉を引く事象を B_n として各事象の確率を求めておきましょう。

まず A_1 の場合は、赤玉の種類で 2 種類あって、もう 1 個の白玉の種類で 6 通りあります。全ての可能性は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りありますから結局 $P(A_1) = \dfrac{2\cdot 6}{{}_8\mathrm{C}_2}$ です。

同様に数えて行けば B_2 は、赤のヴァリエーションで ${}_3\mathrm{C}_2$ ありますから $P(B_2) = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$ です。

$P(A_2), P(B_1)$ も同様に計算して、求める確率 p は、

$$
\begin{aligned}
p &= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \\
&= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) \\
&= \frac{2\cdot 6}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2} + \frac{1}{{}_8\mathrm{C}_2}\cdot\frac{3\cdot 9}{{}_{12}\mathrm{C}_2} \\
&= \frac{2\cdot 6\cdot 3\cdot 2\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 12\cdot 11} + \frac{3\cdot 9\cdot 2\cdot 2}{8\cdot 7\cdot 12\cdot 11} \\
&= \frac{7\cdot 3^2\cdot 2^2}{8\cdot 7\cdot 12\cdot 11} \\
&= \frac{3}{88} \\
&\approx 0.0341
\end{aligned}
$$

となる事が分かります。 □

問題 5 A、B、C の 3 人がこの順番でさいころを振り続け、最初に 1 を出した人が勝ちであるというゲームをします。C が勝つ確率を求めて下さい。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】 C さんは 3、6、9、・・・回目に振る事になりますが、C さんが $3(n+1)$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $3(n+1)$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^C は

$$P_n^C = \left(\frac{5}{6}\right)^{2+3n}\cdot\frac{1}{6}$$

となり、C さんが勝つ確率 P^C は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^C$ であって

$$P^C = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^C = \frac{5^2}{6^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{5^2}{6^3}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{25}{6^3-5^3} = \frac{25}{91} \approx 0.275$$

です。

【A、B、C が１度ずつ引いて終わりと解釈した場合】

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

□

問題 6 箱の中に 1 から 6 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつ入っていて、どのカードも等確率で引かれるものとします。

まず A さんが 1 枚引き、引いたカードは戻さずに次に B さんが 1 枚引きます。A さんが引いたカードに書かれている数字を X、B さんが引いたカードに書かれている数字を Y として、以下の問いに答えてください。

(1) 確率 $P[XY=8]$, $P[XY=12]$ をそれぞれ求めてください。
(2) 期待値 $E[Y]$ を求めてください。
(3) 分散 $Var[X-Y]$ を求めてください。
(4) 期待値 $E[XY]$ を求めてください。

配点：(1)10 点、(2)4 点、(3)3 点、(4)3 点	シラバス到達目標：ウ

【解答例】 (1) (X,Y) の値は $(1,2),(1,3),\dots,(6,5)$ の 30 通りあり、全て確率 $\frac{1}{30}$ です。

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5	6
1		$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$		$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$		$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$		$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$		$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	

$$P[XY=8]=P[(X,Y)=(2,4),(4,2)]=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}\approx 0.067$$
$$P[XY=12]=P[(X,Y)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)]=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}\approx 0.133$$

(2) $Y=k$ となるような結果は、対応した X が k 以外の 5 種類ありますから、

$$P[Y=k]=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}\quad (k=1,2,\dots,6)$$

です。従って、

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{6}k\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3.5$$

です。

(3) まず期待値を求めます。X も

$$E[X]=\sum_{k=1}^{6}k\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

ですから、

$$E[X-Y]=E[X]-E[Y]=0$$

です。従って

$$Var[X-Y]=E[(X-Y)^2]-E[X-Y]^2=E[(X-Y)^2]$$

です。$(X-Y)^2$ は以下のようになっています：

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5	6
1		1	4	9	16	25
2	1		1	4	9	16
3	4	1		1	4	9
4	9	4	1		1	4
5	16	9	4	1		1
6	25	16	9	4	1	

従って

$$E[(X-Y)^2]=\frac{2(1\cdot 5+4\cdot 4+9\cdot 3+16\cdot 2+25)}{30}=7$$

です。

(4)

$$E[X^2] = E[Y^2] = \frac{1+4+9+16+25}{6} = \frac{91}{6}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} 7 &= Var[X-Y] \\ &= E[(X-Y)^2] \\ &= E[X^2] - 2E[XY] + E[Y^2] \\ &= \frac{91}{6} - 2E[XY] + \frac{91}{6} \\ E[XY] &= \frac{35}{3} \approx 11.67 \end{aligned}$$

です。

直接求めるなら、XY は以下の通りです：

$X \diagdown Y$	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6
2	2		6	8	10	12
3	3	6		12	15	18
4	4	8	12		20	24
5	5	10	15	20		30
6	6	12	18	24	30	

従って

$$\begin{aligned} E[XY] &= \frac{(2+3+4+5+8+10+15+18+20+24+30)\cdot 2 + (6+12)\cdot 4}{30} \\ &= \frac{350}{30} \\ &= \frac{35}{3} \\ &\approx 11.67 \end{aligned}$$

です。 □

問題 7 新型コロナウイルス感染症に対して PCR 検査をすると、感染者が陽性と判定される確率（感度）は 70%です。一方、非感染者が陰性と判定される確率（特異度）は 99%です。また、今回問題となっている母集団における感染者の割合は $\frac{1}{1000}$ であると考えられています。

この母集団から無作為に選ばれた A さんが、PCR 検査により陽性と判定されました。このとき、A さんが新型コロナウイルスに感染している確率を求めてください。

配点：10 点	シラバス到達目標：イ

【解答例】 無作為に選ばれた人物が感染者である事象を D、感染者でない事象を $\overline{D}$、PCR 検査で陽性である事象を Y、陰性である事象を N とします。

問題文から分かることは

$$P_D(Y) = \frac{70}{100}, \quad P_{\overline{D}}(N) = \frac{99}{100}, \quad P(D) = \frac{1}{1000}$$

です。

感染の有無＼検査結果	陽性	陰性	合計
感染	$\frac{1}{1000}\cdot\frac{70}{100}$	$\frac{1}{1000}\cdot\frac{30}{100}$	$\frac{1}{1000}$
非感染	$\frac{999}{1000}\cdot\frac{1}{100}$	$\frac{999}{1000}\cdot\frac{99}{100}$	$\frac{999}{1000}$
合計	$\frac{1069}{100000}$	$\frac{98931}{100000}$	1

従って、求める条件付き確率は以下の通りです：

$$\begin{aligned} P_Y(D) &= \frac{P(Y\cap D)}{P(Y)} \\ &= \frac{\frac{70}{100}\cdot\frac{1}{1000}}{\frac{70}{100}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{1}{100}\cdot\frac{999}{1000}} \\ &= \frac{70}{1069} \\ &\approx 0.0655 \end{aligned}$$

□