# 1　整数を整数の和に分割すること

## 1.1　分割数

**演習問題 1.1** 5 を正の整数の有限個（1 個でも構いません）の和で表す方法は何通りありますか。ただし、足す順番が違うだけのものは区別しません。また、同じ数字を何回使っても良いものとします。

実際数えてみますと、

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 & (1)\\
&= 4+1 & (2)\\
&= 3+2 & (3)\\
&= 3+1+1 & (4)\\
&= 2+2+1 & (5)\\
&= 2+1+1+1 & (6)\\
&= 1+1+1+1+1 & (7)
\end{aligned}
$$

の 7 通りあることがわかりますね。

まあ、この程度なら闇雲に数えて行っても何とかなるんですが、例えばこれが『23 を正の整数の和で表す...』なんて問題だったら、何か方針をもって数えて行かないと必ず数え残しをしてしまうでしょう。

一般に、ある正の整数 $n$ が $m$ 個の正の整数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ の和で書けているとき、

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

ですが、この $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を並べ直して

$$n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$$

となるようにすることが必ず出来ます。

だったら最初からこうなるように数えて行けば良く、これで数え漏らすことはありません。

**問題 1.1.1** 9 を正の整数の有限個の和で表す方法は何通りありますか。

大きい数を含む分割から順に数えて行きます。足し算の記号 $+$ の右には左より大きな数字が来ないようにします。

$$
\begin{aligned}
9 &= 9 & (1)\\
&= 8+1 & (2)\\
&= 7+2 & (3)\\
&= 7+1+1 & (4)\\
&= 6+3 & (5)\\
&= 6+2+1 & (6)\\
&= 6+1+1+1 & (7)\\
&= 5+4 & (8)\\
&= 5+3+1 & (9)\\
&= 5+2+2 & (10)\\
&= 5+2+1+1 & (11)\\
&= 5+1+1+1+1 & (12)\\
&= 4+4+1 & (13)\\
&= 4+3+2 & (14)\\
&= 4+3+1+1 & (15)\\
&= 4+2+2+1 & (16)\\
&= 4+2+1+1+1 & (17)\\
&= 4+1+1+1+1+1 & (18)\\
&= 3+3+3 & (19)\\
&= 3+3+2+1 & (20)\\
&= 3+3+1+1+1 & (21)\\
&= 3+2+2+2 & (22)\\
&= 3+2+2+1+1 & (23)\\
&= 3+2+1+1+1+1 & (24)\\
&= 3+1+1+1+1+1+1 & (25)\\
&= 2+2+2+2+1 & (26)\\
&= 2+2+2+1+1+1 & (27)\\
&= 2+2+1+1+1+1+1 & (28)\\
&= 2+1+1+1+1+1+1+1 & (29)\\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1+1 & (30)
\end{aligned}
$$

従ってすべてで 30 通りあります。

**定義 1.1.2** 正の整数 $n$ に対して、$n$ を正の整数の和で表す方法の総数を $n$ の分割数と言い、$P(n)$ で表します。

$n$ を正の奇数のみの和で表す方法の総数を $O(n)$ で表します。

$n$ を互いに異なる正の整数の和で表す方法の総数を $D(n)$ で表します。

分割数の研究は古くから盛んに行われましたが、1918 年に G.H.Hardy と S.Ramanujan は $n$ が大きいときの近似：

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

を得ました。

後年（1937 年）、H.Rademacher がついに明示式：

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right\}$$

を得ましたが、この $A_k(n)$ が非常に難しい形になってしまい（いや、それ以前に十分難しいよ）理解しがたいですね。

今 $P(9)$ を求めた時の計算から $O(9) = 8, \quad D(9) = 8$ であることが分かりますが、次の問題はどうでしょうか？

**演習問題 1.2** $n = 6, 7, 8, 10$ のときに $O(n), D(n)$ を求めて下さい。

まず $O(6), D(6)$ ですが、この場合も $O(6) = D(6) = 4$ となっていますね。

| | $O(6)$ | $D(6)$ | |
|---|---|---|---|
| | $6 = 5+1$ | $6 = 6$ | (1) |
| | $= 3+3$ | $= 5+1$ | (2) |
| | $= 3+1+1+1$ | $= 4+2$ | (3) |
| | $= 1+1+1+1+1+1$ | $= 3+2+1$ | (4) |

次に $n = 7, 8$ の場合です。

| | $O(7)$ | $D(7)$ | |
|---|---|---|---|
| | $7 = 7$ | $7 = 7$ | (1) |
| | $= 5+1+1$ | $= 6+1$ | (2) |
| | $= 3+3+1$ | $= 5+2$ | (3) |
| | $= 3+1+1+1+1$ | $= 4+3$ | (4) |
| | $= 1+1+1+1+1+1+1$ | $= 4+2+1$ | (5) |

| | $O(8)$ | $D(8)$ | |
|---|---|---|---|
| | $8 = 7+1$ | $8 = 8$ | (1) |
| | $= 5+3$ | $= 7+1$ | (2) |
| | $= 5+1+1+1$ | $= 6+2$ | (3) |
| | $= 3+3+1+1$ | $= 5+3$ | (4) |
| | $= 3+1+1+1+1+1$ | $= 5+2+1$ | (5) |
| | $= 1+1+1+1+1+1+1+1$ | $= 4+3+1$ | (6) |

どうでしょうかね？全部一致してますね。試しに $n = 10$ もやってみましょうか？

| | $O(10)$ | $D(10)$ | |
|---|---|---|---|
| | $10 = 9+1$ | $10 = 10$ | (1) |
| | $= 7+3$ | $= 9+1$ | (2) |
| | $= 7+1+1+1$ | $= 8+2$ | (3) |
| | $= 5+5$ | $= 7+3$ | (4) |
| | $= 5+3+1+1$ | $= 7+2+1$ | (5) |
| | $= 5+1+1+1+1+1$ | $= 6+4$ | (6) |
| | $= 3+3+3+1$ | $= 6+3+1$ | (7) |
| | $= 3+3+1+1+1+1$ | $= 5+4+1$ | (8) |
| | $= 3+1+1+1+1+1+1+1$ | $= 5+3+2$ | (9) |
| | $= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ | $= 4+3+2+1$ | (10) |

やっぱり一致していますね。

## 1.2　Euler's Partition Identity

実は次の事実が古くから知られています：

**定理 1.2.1 [ Euler's Partition Identity, L.Euler (1748) ]** 任意の正の整数 $n$ に対して $O(n) = D(n)$ である。

【証明】　無限積

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

を考えます。これを展開した時の $x^n$ の係数は幾らになるでしょうか？

各 $m$ に対応した括弧の中から $1$ か $x^m$ のどちらかをとって掛け合わせたものの総和ですから、掛け合わせたときに $x^n$ となる可能性は丁度相異なる正の整数による $n$ の分割数に一致します。それぞれ係数は 1 ですから、結局 $x^n$ の係数は $D(n)$ です：

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D(n)x^n.$$

もう一つ、別の無限積を考えます：

$$\begin{aligned}
&\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} x^{k(2m-1)}\right) \\
&\quad = (1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\cdots)\cdots \\
&\quad = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots \\
&\quad = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}
\end{aligned}$$

こちらも展開することは、各括弧の中の無限和 $1 + x^{2m-1} + x^{2m-1+2m-1} + x^{2m-1+2m-1+2m-1} + \cdots$ の項の中から 1 つずつ選んで掛けることになります。従って展開した時の $x^n$ の係数は奇数のみを使って $n$ を分割する表し方の総数 $O(n)$ になります。

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} O(n)x^n.$$

従って、示すべきことは、

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}$$

と云うことになります。

これは、

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1+x^m)(1-x^m)}{1-x^m} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{2m}}{1-x^m} \\
&= \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots \\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots \\
&= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}
\end{aligned}$$

によって示されます。

以上によって Euler's Partiton Identity は証明されました。 □

## 1.3　その他の Partition Identity

**定理 1.3.1 [ L.J.Rogers-S.Ramanujan's 1st Identity (1894-1919) ]**

1 の位が 1、4、6、9 の数（5 で割って余りが ±1 の数）への分割と、各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

**定理 1.3.2 [ L.J.Rogers-S.Ramanujan's 2nd Identity, (1894-1919) ]**

1 の位が 2，3，7，8 の数（5 で割って余りが ±2 の数）への分割と、因子は 2 以上で各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

**定理 1.3.3 [ I.Schur's Identity (1917) ]**

6 で割って余りが ±1 である整数への分割と、各因子の差が 3 以上あり、連続する 3 の倍数を含まないような分割とは同数ある。

## 1.4　Exercise

**演習問題 1.3** 正の整数 $n$ を互いに異なる偶数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^0(n)$、互いに異なる奇数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^1(n)$ とします。

(1) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 9, 10, 11, 12$ のときに求めて下さい。

(2) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 5, 7, 8, 15$ のときに求めて下さい。

**演習問題 1.4** $n = 1, \ldots, 10$ のときに分割数 $P(n)$ を求め、$n$ が増えるにつれてどうなって行くかを実際に見て感じて下さい。ただし、$P(5)$ と $P(9)$ は既に見ましたのでその結果を使って下さい。

**演習問題 1.5** 『その他の Partition Identity』で挙げた定理が成り立っていることを、幾つかの数に対して計算して確かめてみてください。

## Exercise　解答篇

**演習問題 1.3** 正の整数 $n$ を互いに異なる偶数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^0(n)$、互いに異なる奇数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^1(n)$ とします。

(1) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 9, 10, 11, 12$ のときに求めて下さい。

(2) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 5, 7, 8, 15$ のときに求めて下さい。

(1)

$$\begin{array}{llr}
D^0(9) & D^1(9) & \\
9 = 8+1 & 9 = 9 & (1) \\
\ \ = 7+2 & \ \ = 6+2+1 & (2) \\
\ \ = 6+3 & \ \ = 5+3+1 & (3) \\
\ \ = 5+4 & \ \ = 4+3+2 & (4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llr}
D^0(10) & D^1(10) & \\
10 = 9+1 & 10 = 10 & (1) \\
\ \ = 8+2 & \ \ = 7+2+1 & (2) \\
\ \ = 7+3 & \ \ = 6+3+1 & (3) \\
\ \ = 6+4 & \ \ = 5+4+1 & (4) \\
\ \ = 4+3+2+1 & \ \ = 5+3+2 & (5)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr}
D^0(11) & D^1(11) & \\
11 = 10+1 & 11 = 11 & (1) \\
\ \ = 9+2 & \ \ = 8+2+1 & (2) \\
\ \ = 8+3 & \ \ = 7+3+1 & (3) \\
\ \ = 7+4 & \ \ = 6+4+1 & (4) \\
\ \ = 6+5 & \ \ = 6+3+2 & (5) \\
\ \ = 5+3+2+1 & \ \ = 5+4+2 & (6)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llr}
D^0(12) & D^1(12) & \\
12 = 11+1 & 12 = 12 & (1) \\
\ \ = 10+2 & \ \ = 9+2+1 & (2) \\
\ \ = 9+3 & \ \ = 8+3+1 & (3) \\
\ \ = 8+4 & \ \ = 7+4+1 & (4) \\
\ \ = 7+5 & \ \ = 7+3+2 & (5) \\
\ \ = 6+3+2+1 & \ \ = 6+5+1 & (6) \\
\ \ = 5+4+2+1 & \ \ = 6+4+2 & (7) \\
 & \ \ = 5+4+3 & (8)
\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{llr}
D^0(5) & D^1(5) & \\
5 = 4+1 & 5 = 5 & (1) \\
\ \ = 3+2 & & (2)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llr}
D^0(7) & D^1(7) & \\
7 = 6+1 & 7 = 7 & (1) \\
\ \ = 5+2 & \ \ = 4+2+1 & (2) \\
\ \ = 4+3 & & (3)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llr}
D^0(8) & D^1(8) & \\
8 = 7+1 & 8 = 8 & (1) \\
\ \ = 6+2 & \ \ = 5+2+1 & (2) \\
\ \ = 5+3 & \ \ = 4+3+1 & (3)
\end{array}$$

□

$$
\begin{aligned}
&D^0(15) && D^1(15) && \\
15 &= 14+1 & 15 &= 15 & (1)\\
&= 13+2 & &= 12+2+1 & (2)\\
&= 12+3 & &= 11+3+1 & (3)\\
&= 11+4 & &= 10+4+1 & (4)\\
&= 10+5 & &= 10+3+2 & (5)\\
&= 9+6 & &= 9+5+1 & (6)\\
&= 9+3+2+1 & &= 9+4+2 & (7)\\
&= 8+7 & &= 8+6+1 & (8)\\
&= 8+4+2+1 & &= 8+5+2 & (9)\\
&= 7+5+2+1 & &= 8+4+3 & (10)\\
&= 7+4+3+1 & &= 7+6+2 & (11)\\
&= 6+5+3+1 & &= 7+5+3 & (12)\\
&= 6+4+3+2 & &= 6+5+4 & (13)\\
& & &= 5+4+3+2+1 & (14)
\end{aligned}
$$

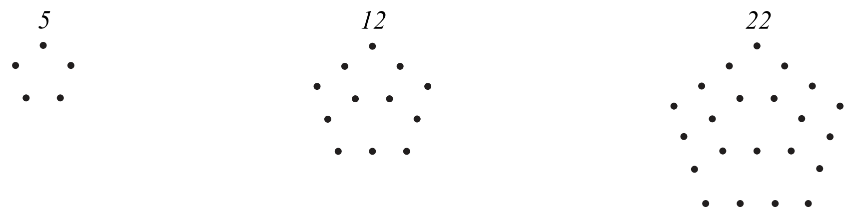
(1) では一致するものが多かったのですが、(2) はずれているものが多いですね。しかも $D^0$ の方が大きかったり、$D^1$ の方が大きかったりいろいろです。

実は次の事実が知られています：

**定理 1.5.1 [ Euler の五角数定理 ]**

$$
D^0(n) - D^1(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{if } n = \frac{k(3k\pm1)}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

一般に $\frac{k(3k\pm1)}{2}$ $k = 1, 2, \ldots$ の型の整数を（一般化された）五角数と言います。$\pm$ のマイナスの方がオリジナルの五角数で $1, 5, 12, 22, \ldots$ となりますが、点を正五角形状に並べた場合の点の数に対応しています。




**演習問題 1.4** $n = 1, \ldots, 10$ のときに分割数 $P(n)$ を求め、$n$ が増えるにつれてどうなって行くかを実際に見て感じて下さい。ただし、$P(5)$ と $P(9)$ は既に見ましたのでその結果を使って下さい。

$$
\begin{aligned}
10 &= 10 & (1) \qquad 10 &= 4+3+3 & (22)\\
&= 9+1 & (2) \qquad &= 4+3+2+1 & (23)\\
&= 8+2 & (3) \qquad &= 4+3+1+1+1 & (24)\\
&= 8+1+1 & (4) \qquad &= 4+2+2+2 & (25)\\
&= 7+3 & (5) \qquad &= 4+2+2+1+1 & (26)\\
&= 7+2+1 & (6) \qquad &= 4+2+1+1+1+1 & (27)\\
&= 7+1+1+1 & (7) \qquad &= 4+1+1+1+1+1+1 & (28)\\
&= 6+4 & (8) \qquad &= 3+3+3+1 & (29)\\
&= 6+3+1 & (9) \qquad &= 3+3+2+2 & (30)\\
&= 6+2+2 & (10) \qquad &= 3+3+2+1+1 & (31)\\
&= 6+2+1+1 & (11) \qquad &= 3+3+1+1+1+1 & (32)\\
&= 6+1+1+1+1 & (12) \qquad &= 3+2+2+2+1 & (33)\\
&= 5+5 & (13) \qquad &= 3+2+2+1+1+1 & (34)\\
&= 5+4+1 & (14) \qquad &= 3+2+1+1+1+1+1 & (35)\\
&= 5+3+2 & (15) \qquad &= 3+1+1+1+1+1+1+1 & (36)\\
&= 5+3+1+1 & (16) \qquad &= 2+2+2+2+2 & (37)\\
&= 5+2+2+1 & (17) \qquad &= 2+2+2+2++1+1 & (38)\\
&= 5+2+1+1+1 & (18) \qquad &= 2+2+2+1+1+1+1+ & (39)\\
&= 5+1+1+1+1+1 & (19) \qquad &= 2+2+1+1+1+1+1+1 & (40)\\
&= 4+4+2 & (20) \qquad &= 2+1+1+1+1+1+1+1+1 & (41)\\
&= 4+4+1+1 & (21) \qquad &= 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 & (42)
\end{aligned}
$$

$$\begin{align}
8 &= 8 \tag{1}\\
&= 7+1 \tag{2}\\
&= 6+2 \tag{3}\\
&= 6+1+1 \tag{4}\\
&= 5+3 \tag{5}\\
&= 5+2+1 \tag{6}\\
&= 5+1+1+1 \tag{7}\\
&= 4+4 \tag{8}\\
&= 4+3+1 \tag{9}\\
&= 4+2+2 \tag{10}\\
&= 4+2+1+1 \tag{11}\\
&= 4+1+1+1+1 \tag{12}\\
&= 3+3+2 \tag{13}\\
&= 3+3+1+1 \tag{14}\\
&= 3+2+2+1 \tag{15}\\
&= 3+2+1+1+1 \tag{16}\\
&= 3+1+1+1+1+1 \tag{17}\\
&= 2+2+2+2 \tag{18}\\
&= 2+2+2+1+1 \tag{19}\\
&= 2+2+1+1+1+1 \tag{20}\\
&= 2+1+1+1+1+1+1 \tag{21}\\
&= 1+1+1+1+1+1+1+1 \tag{22}
\end{align}$$

$$\begin{align}
7 &= 7 \tag{1}\\
&= 6+1 \tag{2}\\
&= 5+2 \tag{3}\\
&= 5+1+1 \tag{4}\\
&= 4+3 \tag{5}\\
&= 4+2+1 \tag{6}\\
&= 4+1+1+1 \tag{7}\\
&= 3+3+1 \tag{8}\\
&= 3+2+2 \tag{9}\\
&= 3+2+1+1 \tag{10}\\
&= 3+1+1+1+1 \tag{11}\\
&= 2+2+2+1 \tag{12}\\
&= 2+2+1+1+1 \tag{13}\\
&= 2+1+1+1+1+1 \tag{14}\\
&= 1+1+1+1+1+1+1 \tag{15}
\end{align}$$

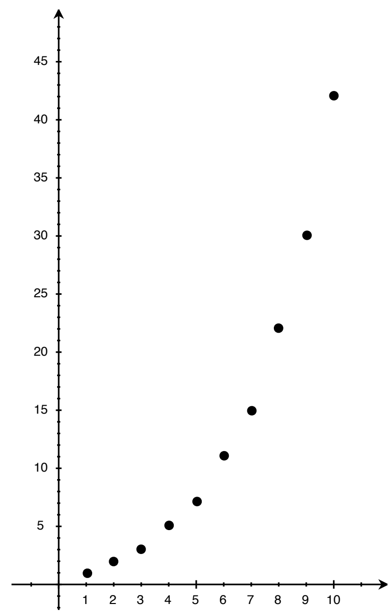
$$\begin{align}
2 &= 2 \tag{1}\\
&= 1+1 \tag{2}
\end{align}$$

$$\begin{align}
3 &= 3 \tag{1}\\
&= 2+1 \tag{2}\\
&= 1+1+1 \tag{3}
\end{align}$$

$$\begin{align}
6 &= 6 \tag{1}\\
&= 5+1 \tag{2}\\
&= 4+2 \tag{3}\\
&= 4+1+1 \tag{4}\\
&= 3+3 \tag{5}\\
&= 3+2+1 \tag{6}\\
&= 3+1+1+1 \tag{7}\\
&= 2+2+2 \tag{8}\\
&= 2+2+1+1 \tag{9}\\
&= 2+1+1+1+1 \tag{10}\\
&= 1+1+1+1+1+1 \tag{11}
\end{align}$$

$$\begin{align}
4 &= 4 \tag{1}\\
&= 3+1 \tag{2}\\
&= 2+2 \tag{3}\\
&= 2+1+1 \tag{4}\\
&= 1+1+1+1 \tag{5}
\end{align}$$

以上から、$P(n)$ は、$1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, \dots$ と増えていきます。




□

> **演習問題 1.5** 『その他の Partition Identity』で挙げた定理が成り立っていることを、幾つかの数に対して計算して確かめてみてください。

例えば以下のようになっています：

1,4,6,9

$$\begin{aligned}
10 &= 9+1\\
&= 6+4\\
&= 6+1+1+1+1\\
&= 4+4+1+1\\
&= 4+1+\cdots+1\\
&= 1+\cdots+1
\end{aligned}$$

差 2 以上

$$\begin{align}
10 &= 10 \tag{1}\\
&= 9+1 \tag{2}\\
&= 8+2 \tag{3}\\
&= 7+3 \tag{4}\\
&= 6+4 \tag{5}\\
&= 6+3+1 \tag{6}
\end{align}$$

2,3,7,8

$$\begin{aligned}
10 &= 8+2\\
&= 7+3\\
&= 3+3+2+2\\
&= 2+2+2+2+2
\end{aligned}$$

2 以上、差 2 以上

$$\begin{align}
10 &= 10 \tag{1}\\
&= 8+2 \tag{2}\\
&= 7+3 \tag{3}\\
&= 6+4 \tag{4}
\end{align}$$

±1 mod 6　　差 3 以上、連続 3 の倍数 NG

$$
\begin{aligned}
10 &= 7+1+1+1 & 10 &= 10 && (1)\\
&= 5+5 & &= 9+1 && (2)\\
&= 5+1+\cdots+1 & &= 8+2 && (3)\\
&= 1+\cdots+1 & &= 7+3 && (4)
\end{aligned}
$$

1,4,6,9　　差 2 以上

$$
\begin{aligned}
15 &= 14+1 & 15 &= 15 && (1)\\
&= 11+4 & &= 14+1 && (2)\\
&= 11+1+\cdots+1 & &= 13+2 && (3)\\
&= 9+6 & &= 12+3 && (4)\\
&= 9+4+1+1 & &= 11+4 && (5)\\
&= 9+1+\cdots+1 & &= 11+3+1 && (6)\\
&= 6+6+1+1+1 & &= 10+5 && (7)\\
&= 6+4+4+1 & &= 10+4+1 && (8)\\
&= 6+4+1+\cdots+1 & &= 9+6 && (9)\\
&= 6+1+\cdots+1 & &= 9+5+1 && (10)\\
&= 4+4+4+1+1+1 & &= 9+4+2 && (11)\\
&= 4+4+1+\cdots+1 & &= 8+6+1 && (12)\\
&= 4+1+\cdots+1 & &= 8+5+2 && (13)\\
&= 1+\cdots+1 & &= 7+5+3 && (14)
\end{aligned}
$$

2,3,7,8　　2 以上、差 2 以上

$$
\begin{aligned}
15 &= 13+2 & 15 &= 15 && (1)\\
&= 12+3+\cdots+1 & &= 13+2 && (2)\\
&= 8+7 & &= 12+3 && (3)\\
&= 8+3+2+2 & &= 11+4 && (4)\\
&= 7+2+\cdots+2 & &= 10+5 && (5)\\
&= 3+\cdots+3 & &= 9+6 && (6)\\
&= 3+3+3+2+2+2 & &= 9+4+2 && (7)\\
&= 3+2+\cdots+2 & &= 8+5+2 && (8)\\
&= 2+\cdots+2 & &= 7+5+3 && (9)
\end{aligned}
$$

±1 mod 6　　差 3 以上、連続 3 の倍数 NG

$$
\begin{aligned}
15 &= 13+1+1 & 15 &= 15 && (1)\\
&= 11+1+\cdots+1 & &= 14+1 && (2)\\
&= 7+7+1 & &= 13+2 && (3)\\
&= 7+5+1+1+1 & &= 12+3 && (4)\\
&= 7+1+\cdots+1 & &= 11+4 && (5)\\
&= 5+5+5 & &= 10+5 && (6)\\
&= 5+5+1+\cdots+1 & &= 10+4+1 && (7)\\
&= 5+1+\cdots+1 & &= 9+5+1 \quad \leftarrow 9+6 \text{ はダメ} && (8)\\
&= 1+\cdots+1 & &= 8+5+2 && (9)
\end{aligned}
$$

□