1　整数を整数の和に分割すること

1.1　分割数

演習問題 1.1 5 を正の整数の有限個（1 個でも構いません）の和で表す方法は何通りありますか。ただし、足す順番が違うだけのものは区別しません。また、同じ数字を何回使っても良いものとします。

問題 1.1.1 9 を正の整数の有限個の和で表す方法は何通りありますか。

定義 1.1.2 正の整数 n に対して、n を正の整数の和で表す方法の総数を n の分割数と言い、$P(n)$ で表します。

n を正の奇数のみの和で表す方法の総数を $O(n)$ で表します。

n を互いに異なる正の整数の和で表す方法の総数を $D(n)$ で表します。

分割数の研究は古くから盛んに行われましたが、1918 年に G.H.Hardy と S.Ramanujan は n が大きいときの近似：

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

を得ました。

演習問題 1.2 $n = 6, 7, 8, 10$ のときに $O(n), D(n)$ を求めて下さい。

$$
\begin{aligned}
&O(6) && D(6) & \\
6 &= 5+1 & 6 &= 6 & (1)\\
&= 3+3 & &= 5+1 & (2)\\
&= 3+1+1+1 & &= 4+2 & (3)\\
&= 1+1+1+1+1+1 & &= 3+2+1 & (4)
\end{aligned}
$$

1.2　Euler's Partition Identity

実は次の事実が古くから知られています：

定理 1.2.1 [Euler's Partition Identity, L.Euler (1748)] 任意の正の整数 n に対して $O(n) = D(n)$ である。

【証明】　無限積

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$

を考えます。これを展開した時の x^n の係数は幾らになるでしょうか？

各 m に対応した括弧の中から 1 か x^m のどちらかをとって掛け合わせたものの総和ですから、掛け合わせたときに x^n となる可能性は丁度相異なる正の整数による n の分割数に一致します。それぞれ係数は 1 ですから、結局 x^n の係数は $D(n)$ です：

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q(n)x^n.$$

もう一つ、別の無限積を考えます：

$$
\begin{aligned}
&\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^{k(2m-1)}\right) \\
&\quad = (1 + x + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \cdots)(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + \cdots)\cdots \\
&\quad = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\
&\quad = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}
\end{aligned}
$$

こちらも展開することは、各括弧の中の無限和

$$1 + x^{2m-1} + x^{2m-1+2m-1} + x^{2m-1+2m-1+2m-1} + \cdots$$

の項の中から 1 つずつ選んで掛けることになります。従って展開した時の x^n の係数は奇数のみを使って n を分割する表し方の総数 $O(n)$ になります。

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} O(n)x^n.$$

従って、示すべきことは、

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}$$

と云うことになります。

これは、

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+x^m)(1-x^m)}{1-x^m} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-x^{2m}}{1-x^m} \\
&= \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2m-1}}
\end{aligned}$$

によって示されます。

以上によって Euler's Partiton Identity は証明されました。 □

1.3　その他の partition identity

定理 1.3.1 [L.J.Rogers-S.Ramanujan's 1st Identity (1894-1919)]
1 の位が 1、4、6、9 の数（5 で割って余りが ±1 の数）への分割と、各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

定理 1.3.2 [L.J.Rogers-S.Ramanujan's 2nd Identity, (1894-1919)]
1 の位が 2，3，7，8 の数（5 で割って余りが ±2 の数）への分割と、因子は 2 以上で各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

定理 1.3.3 [I.Schur's Identity (1917)]
6 で割って余りが ±1 である整数への分割と、各因子の差が 3 以上あり、連続する 3 の倍数を含まないような分割とは同数ある。

1.4　Exercise

演習問題 1.3 正の整数 n を互いに異なる偶数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^0(n)$、互いに異なる奇数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^1(n)$ とします。

(1) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 9, 10, 11, 12$ のときに求めて下さい。

(2) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 5, 7, 8, 15$ のときに求めて下さい。

演習問題 1.4 $n = 1, \ldots, 10$ のときに分割数 $P(n)$ を求め、n が増えるにつれてどうなって行くかを実際に見て感じて下さい。ただし、$P(5)$ と $P(9)$ は既に見ましたのでその結果を使って下さい。

演習問題 1.5 『その他の Partition Identity』で挙げた定理が成り立っていることを、幾つかの数に対して計算して確かめてみてください。