1　整数を整数の和に分割すること

1.1　分割数

演習問題 1.1 5 を正の整数の有限個（1 個でも構いません）の和で表す方法は何通りありますか。ただし、足す順番が違うだけのものは区別しません。また、同じ数字を何回使っても良いものとします。

問題 1.1.1 9 を正の整数の有限個の和で表す方法は何通りありますか。

定義 1.1.2 正の整数 n に対して、n を正の整数の和で表す方法の総数を n の分割数と言い、$P(n)$ で表します。

n を正の奇数のみの和で表す方法の総数を $O(n)$ で表します。

n を互いに異なる正の整数の和で表す方法の総数を $D(n)$ で表します。

分割数の研究は古くから盛んに行われましたが、1918 年に G.H.Hardy と S.Ramanujan は n が大きいときの近似：

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

を得ました。

演習問題 1.2 $n = 6, 7, 8, 10$ のときに $O(n), D(n)$ を求めて下さい。

$$
\begin{array}{llr}
O(6) & D(6) & \\
6 = 5 + 1 & 6 = 6 & (1) \\
= 3 + 3 & = 5 + 1 & (2) \\
= 3 + 1 + 1 + 1 & = 4 + 2 & (3) \\
= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 & = 3 + 2 + 1 & (4)
\end{array}
$$

1.2　Euler's Partition Identity

実は次の事実が古くから知られています：

定理 1.2.1 [Euler's Partition Identity, L.Euler (1748)] 任意の正の整数 n に対して $O(n) = D(n)$ である。

まず正の奇数による分割の１つを取りましょう：$6 = 3 + 1 + 1 + 1$。この分割において、もしも同じ数が含まれていたら、それを２つとって足してしまいましょう。今の場合には 1 が複数ありますからそのうちの２つをとって足す事によって $6 = 3 + 2 + 1$ が得られます。得られた結果を見て、同じ数が含まれていれば同じ操作を繰り返します。今回はもう同じ数はありませんので、結果的に『互いに異なる正の整数による分割』が得られました。

逆に、今度は互いに異なる正の整数による分割の１つを取りましょう：$6 = 3 + 2 + 1$。この分割において、もしも偶数が使われているのであれば、それを半分ずつにして行って同じ奇数の和にしてしまいます。今回のケースでは 2 がありますからこれを $1 + 1$ で置き換えるわけです。すると $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ が得られます。得られた結果を見て、まだ偶数があるようなら同じ操作を繰り返します。今回はもうありませんので終了です。そうすると結果的に『正の奇数による分割』が得られますね。しかもこれら２つの操作は互いに逆操作になっていますので、この操作によってペアリングが出来ることが分かるでしょう。

11 の分割の対応の例：

$$11 = 5 + \underline{3 + 3} + \underline{1 + 1} + \underline{1 + 1} \to 5 + 6 + \underline{2 + 2} \to 6 + 5 + 4$$

$$11 = \underline{6} + 5 + \underline{4} \to 3 + 3 + 5 + \underline{2} + \underline{2} \to 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

【証明】

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = 1+\sum_{n=1}^{\infty}Q(n)x^n$$

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}} &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots \\ &= (1+x+x^{1+1}+x^{1+1+1}+\cdots)(1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+\cdots)\cdots \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}x^{k(2m-1)}\right) \\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}O(n)x^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{(1+x^m)(1-x^m)}{1-x^m} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-x^{2m}}{1-x^m} \\ &= \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots \\ &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}\end{aligned}$$

□

1.3　その他の partition identity

定理 1.3.1 [L.J.Rogers-S.Ramanujan's 1st Identity (1894-1919)]
　1 の位が 1、4、6、9 の数（5 で割って余りが ±１の数）への分割と、各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

定理 1.3.2 [L.J.Rogers-S.Ramanujan's 2nd Identity, (1894-1919)]
　1 の位が 2，3，7，8 の数（5 で割って余りが ±２の数）への分割と、因子は 2 以上で各因子の差が 2 以上ある分割とは同数ある。

定理 1.3.3 [I.Schur's Identity (1917)]
　6 で割って余りが ±１である整数への分割と、各因子の差が 3 以上あり、連続する 3 の倍数を含まないような分割とは同数ある。

1.4　Exercise

演習問題 1.3 正の整数 n を互いに異なる偶数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^0(n)$、互いに異なる奇数個の正の整数の和で表す方法の総数を $D^1(n)$ とします。

(1) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 9, 10, 11, 12$ のときに求めて下さい。

(2) $D^0(n), D^1(n)$ を、$n = 5, 7, 8, 15$ のときに求めて下さい。

演習問題 1.4 $n = 1, \ldots, 10$ のときに分割数 $P(n)$ を求め、n が増えるにつれてどうなって行くかを実際に見て感じて下さい。ただし、$P(5)$ と $P(9)$ は既に見ましたのでその結果を使って下さい。

演習問題 1.5 『その他の Partition Identity』で挙げた定理が成り立っていることを、幾つかの数に対して計算して確かめてみてください。

演習問題 1.6 ** (1) 9 を 4 個の正整数の和に分割する方法（$9 = 4+2+2+1$ など）の総数と、9 を 4 を最大数として含むような幾つかの正整数の和に分割する方法（$9 = 4+3+2$ など）の総数を求めて下さい。ただし、和の順序だけ違うものは区別しません。

(2) $m \leq n$ を正の整数とします。n を m 個の正整数に分割する方法の総数と、最大数が m であるような正整数で分割する方法の総数は常に一致することを示して下さい。

演習問題 1.7 ** (1) $x_1+x_2+x_3 \leq 2$ を満たす非負整数の組 (x_1, x_2, x_3) の総数と、$y_1+y_2 \leq 3$ を満たす非負整数の組 (y_1, y_2) の総数をそれぞれ求めて下さい。($(0,0,1)$ と $(0,1,0)$ などは区別します)。

(2) m, n は正の整数であるとします。$x_1+\cdots+x_m \leq n$ を満たす非負整数の組 $(x_1, \ldots, x_m)$ の総数と、$y_1+\cdots+y_n \leq m$ を満たす非負整数の組 $(y_1, \ldots, y_n)$ の総数はいつも一致することを示して下さい。