

2 可能性の総数を数え上げること

2.1 並べ方、組み合わせを数える

問題 2.1.1 [教科書 例題 19.1] 1, 1, 1, 2, 3 の 5 個の数字から 3 個とって並べて出来る数のうち、異なるものは幾つありますか。

並べて出来る (3 桁の) 数が異なればそれは区別して数えるわけですから、例えば 1, 1, 3 をとった場合並べ方は 113, 131, 311 の 3 通りあり、全て区別して数えます。

和のような場合は大きな方から攻めた方がやり易い気がしますが、小さな方から並べた方が良いこともあります。広い意味で、そう言った並べ方を『辞書式』と言います。この問題も出来る数字の小さい方から順に考えて行くとやり易いでしょう。まず 100 の位が小さいものから始めて、その中で 1 の位から少しずつ大きくして行きます。

111	(1)	121	(4)	132	(7)	231	(10)
112	(2)	123	(5)	211	(8)	311	(11)
113	(3)	131	(6)	213	(9)	312	(12)
				321	(13)		

この様に 13 通りあります。

□

問題 2.1.2 [参考問題] 1, 1, 1, 2, 3 の 5 個の数字から 3 個とる組み合わせは何通りありますか。

でもこう云う問題だった場合は、とった 3 つの数が 1, 2, 3 であると言っても 3, 1, 2 であると言っても同じ事であり区別しませんので、3 つ組をどう記述するかが問題になります。123 と書いても 312 と書いても同じものですから、何かルールが必要です。そこで、とった 3 つを左から小さい順に並べる事にします。

とった 3 つ組に対してその様な並べ方はただ 1 通りしかありません。実際にこの問題の場合に考えてみると、答えは次の様に 4 通りです：

111, 112, 113, 123.

□

演習問題 2.1 [教科書 問題 19.1] 和が 9 となる 3 個の自然数 (正の整数) の組は幾つありますか。

$$9 = a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 \geq a_2 \geq a_3$$

となるようにして数えて行くと、

$$\begin{aligned} 9 &= 7 + 1 + 1 & (1) & \quad = 5 + 2 + 2 & (4) & \quad = 4 + 3 + 2 & (6) \\ &= 6 + 2 + 1 & (2) & \quad = 4 + 4 + 1 & (5) & \quad = 3 + 3 + 3 & (7) \\ &= 5 + 3 + 1 & (3) & \end{aligned}$$

の 7 通りです。

□

問題 2.1.3 [教科書 例題 19.2] 大小 2 つのサイコロを同時に投げて、出る目の数の和が 5 の倍数になる場合は何通りありますか。

出る目の数の和が 5 の倍数になるには、和が 5 の場合と和が 10 の場合があって、それらが同時に起こる事はないからそれぞれの場合の可能性の総数を数えて足せば良い。

和が 5 の場合					和が 10 の場合			
大	1	2	3	4	大	4	5	6
小	4	3	2	1	小	6	5	4

従って合計で 7 通りあります。

□

この問題も 2 つのサイコロを区別しないのであれば、例えば 2 つの目が 1, 4 の場合と 4, 1 の場合などは区別しませんから重複している分を除外すれば

$$(1, 4), (2, 3), (4, 6), (5, 5)$$

の 4 通りしかありません。

演習問題 2.2 [教科書 問題 19.2] 大小2つのサイコロを同時に投げて、出る目の数の和が4の倍数になる場合は何通りありますか。

出る目の数の和が4の倍数になるには、和が4、8、12の場合があって、それらが同時に起こる事はないからそれぞれの場合の可能性の総数を数えて足せば良い。

和が4、8になる場合は以下の通り：

和が4の場合				
大	1	2	3	
小	3	2	1	

和が8の場合						
大	2	3	4	5	6	
小	6	5	4	3	2	

合計8通りあります。また、和が12となるのは大小共に6が出た場合のみですから1通りであり、合計で9通りあります。 □

演習問題 2.3 [教科書問題 19.3] ある山に登るのに A,B,C,D,E の5つの登山道があります。この山に登って下るのに、次の場合何通りの道の選び方があるでしょうか。

(1) 上りと下りが同じ道であってもよい場合。

(2) 上りと下りが異なる道である場合。

(1) 登りは5通りあり、そのそれぞれの場合に対して下りも5通りありますから合計で25通り。

(2) 登りは5通りありますが、下りはそれぞれ4通りになります。従って合計で20通りです。 □

問題 2.1.4 [教科書問題 19.4] 432の約数は何個ありますか。

$432 = 2^4 \cdot 3^3$ ですから、その約数は $2^m \cdot 3^n$ の形をしていて $m = 0, 1, 2, 3, 4$, $n = 0, 1, 2, 3$ のいずれかです。 m, n の値が違えばそれに応じた約数 $2^m \cdot 3^n$ も異なる値になりますから約数の個数は $5 \times 4 = 20$ 個です。 □

2.2 Exercise

演習問題 2.4 アルファベット a,b,b,c,d の中から3つとって並べて得られる文字列の可能性は何通りありますか？

演習問題 2.5 袋の中に赤い玉が3個、白い玉が2個、黒い玉が1個入っています。袋の中から3個取り出した場合の色の組み合わせは何通りありますか。

演習問題 2.6 100に約数は幾つありますか。

演習問題 2.7 1, 2, 3, 3, 5 から3つとって和が偶数になる可能性は何通りありますか？

演習問題 2.8 現在2名、2名、1名の3グループに分かれているとします。メンバーの入れ替えを行って、現在同じグループにいる人は次に同じグループに入らないようにする方法は何通りありますか？

Exercise 解答篇

演習問題 2.4 アルファベット a,b,b,c,d の中から 3 つとって並べて得られる文字列の可能性は何通りありますか？

文字列が『もし辞書に載っていたなら』と云う風に考えて辞書式に数えて行きます。

abb	bab	bca	cab	dab
abc	bac	bc b	cad	dac
abd	bad	bcd	cba	dba
acb	bba	bda	cbb	dbb
acd	bbc	bdb	cbd	dbc
adb	bbd	bdc	cda	dca
adc			cdb	dc b

以上で 3 3 通りですね。また、これは次のようにして数えることも出来ます。

b が 0 個の場合

a,c,d が自由に並べられるので、1 番左に来るものの可能性が 3 通り、真ん中に来るものは残った 2 つの 2 通り、右はこの時点で決定されてしまいます。従って 6 通りです。

b が 1 個の場合

b の場所以外のところに残りの a,c,d がどう並ぶかですから、残りの場所のうち左が 3 通り、右は残りが 2 個ですから 2 通り、合計 6 通りあって、これが 3 の場所 (3 つの可能性がありますが) によってそれぞれありますから、合計 18 通りです。

b が 2 個の場合

残りの場所は 1 カ所しかありません。そこに残りの文字 a,c,d のいずれかが来るわけですから 3 通りあります。ただし、残りの場所の位置にも 3 通りありますから合計 9 通りです。

合計

以上合わせて 33 通りです。

演習問題 2.5 袋の中に赤い玉が 3 個、白い玉が 2 個、黒い玉が 1 個入っています。袋の中から 3 個取り出した場合の色の組み合わせは何通りありますか。

赤を 0、白を 1、黒を 2 と表すことにして、この数字表現で 3 桁の数字 (100 の位が 0 になって実質 2 桁の場合なども含む) だと思って小さなものから順に数えて行きます。ただし、さっきの問題が並ぶ順番も区別しているのに対して、この問題では色の組み合わせしか見ておらず、順番は無視していますから、各位の数は右は左より小さくならないようにすれば良いことがわかります。

- 000 (1)
- 001 (2)
- 002 (3)
- 011 (4)
- 012 (5)
- 112 (6)

従って可能性は 6 通りです。

演習問題 2.6 100 に約数は幾つありますか。

$100 = 2^2 \cdot 5^2$ なので、2, 2, 5, 5 のうち幾つかを掛けて得られる数および 1 が約数のすべてです。

$1, 2, 2^2 = 4, 5, 2 \cdot 5 = 10, 2^2 \cdot 5 = 20, 5^2 = 25, 2 \cdot 5^2 = 50, 2^2 \cdot 5^2 = 100$

従って約数は 9 個です。

演習問題 2.7 1, 2, 3, 3, 5 から 3 つとって和が偶数になる可能性は何通りありますか？

偶数が 1 個しかありませんから、3 個の中には必ず奇数が入ります。奇数が奇数個で残りが偶数だと和は奇数ですので、奇数は偶数個しかあり得ず、2 個です。

従って偶数 2 が必ず入り、残りの 2 つが 4 つの奇数 1, 3, 3, 5 のどれか 2 つです。その可能性は

$$2 + 1 + 3 = 6, \quad 2 + 1 + 5 = 8, \quad 2 + 3 + 3 = 8, \quad 2 + 3 + 5 = 10$$

の 4 通りしかありません。

演習問題 2.8 現在 2 名、2 名、1 名の 3 グループに分かれているとします。メンバーの入れ替えを行って、現在同じグループにいる人は次に同じグループに入らないようにする方法は何通りありますか？

現在の 3 グループの各メンバーに次のように名前をつけておきます：

$$(A_1, A_2), \quad (B_1, B_2), \quad (C)$$

次のグループ分けにおいて、 A_1, A_2 は同じグループに入れませんからこの 2 人は分かれることになります。 B_1, B_2 も同様です。

数えると次の様になります：

$$(C)(A_1 B_1)(A_2 B_2) \quad (1)$$

$$(C)(A_1 B_2)(A_2 B_1) \quad (2)$$

$$(A_1)(A_2 B_1)(B_2 C) \quad (3)$$

$$(A_1)(A_2 B_2)(B_1 C) \quad (4)$$

$$(A_2)(A_1 B_1)(B_2 C) \quad (5)$$

$$(A_2)(A_1 B_2)(B_1 C) \quad (6)$$

$$(B_1)(A_1 B_2)(A_2 C) \quad (7)$$

$$(B_1)(A_1 C)(A_2 B_2) \quad (8)$$

$$(B_2)(A_1 B_1)(A_2 C) \quad (9)$$

$$(B_2)(A_1 C)(B_1 A_2) \quad (10)$$