2　総数を数え上げること

2.1　いろいろな数え上げ

演習問題 2.1 [教科書　問題 19.1] 和が 9 となる 3 個の自然数（正の整数）の組は幾つありますか。

演習問題 2.2 [教科書問題 19.3] ある山を登るのに A,B,C,D,E の 5 つの登山道があります。この山に登って下るのに、次の場合何通りの道の選び方があるでしょうか。
(1) 上りと下りが同じ道であってもよい場合。
(2) 上りと下りが異なる道である場合。

問題 2.1.1 [教科書問題 19.4] 432 の約数は何個ありますか。

$432 = 2^4 \cdot 3^3$ ですから、その約数は $2^m \cdot 3^n$ の形をしていて $m = 0, 1, 2, 3, 4,\ n = 0, 1, 2, 3$ のいずれかです。m, n の値が違えばそれに応じた約数 $2^m \cdot 3^n$ も異なる値になりますから約数の個数は $5 \times 4 = 20$ 個です。 □

問題 2.1.2 [教科書　例題 19.2] 大小 2 つのサイコロを同時に投げて、出る目の数の和が 5 の倍数になる場合は何通りありますか。

和が 5 の場合				
大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

和が 10 の場合			
大	4	5	6
小	6	5	4

□

演習問題 2.3 [教科書　問題 19.2　改題] 方程式：$x + y \equiv 0 \pmod 4$ の 6 以下の正の整数解 (x, y) は幾つありますか。

2.2　方程式・不等式の整数解

問題 2.2.1　方程式：$x + y + z = 10$ の、非負整数解が何組あるか調べてください。

白丸 10 個と、黒丸 2 個を 1 列に並べる方法は 66 通り。

$$\overbrace{\circ\ \circ}^{x}\ \bullet\ \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{y}\ \bullet\ \overbrace{\circ\ \circ\ \circ}^{z} \qquad (x, y, z) = (2, 5, 3)$$

問題の方程式の非負整数解全体と、白丸 10 個・黒丸 2 個を 1 列に並べたもの全体は１対１に対応している。 □

演習問題 2.4 (1) 方程式：$x + y + z = 9$ の非負整数解が何組あるか調べてください。
(2) 方程式：$x + y + z = 9$ の正の整数解が何組あるか調べてください。

問題 2.2.2　方程式：$x + y + z \leq 10$ の、非負整数解が何組あるか調べてください。

$x + y + z \leq 10$ の非負整数解の総数は、$x + y + z + w = 10$ の非負整数解の総数に一致し、更にそれは 10 個の白丸と 3 個の黒丸を 1 列に並べる方法の総数に一致します。

合計 13 個の丸を並べるわけですが、黒丸を 1 つ 1 つ区別すれば、黒丸 1 の場所の選び方が 13 通り、黒丸 2 が 12 通り、黒丸 3 が 11 通りあります。従って合計で $13 \cdot 12 \cdot 11$ 通りの並べ方がありますが、本来黒丸に区別はありませんから、3 つの黒丸の並べ方、つまり、$3 \cdot 2 = 6$ 通りの同じものを含んでいることになります。従って、並べ方の総数は

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 286$$

通りです。 □

2.3　格子点を数える

問題 2.3.1 次の領域 D について以下の問いに答えてください。

$$D: \quad x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5$$

(1) D の境界線を除いた内部にある格子点の数 I を数えてください。
(2) D の境界上にある格子点の数 E を数えてください。
(3) $I + \frac{1}{2}E - 1$ を求めてください。
(4) D の面積 S を求めてください。

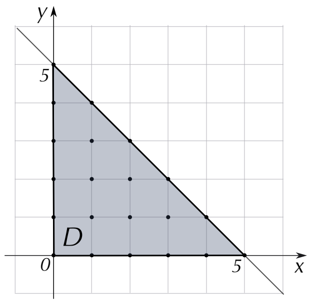
この程度であれば、具体的に絵を描いて数えることが可能です。

(1) $I = 3 + 2 + 1 = 6$

(2) $E = 6 + 5 + 4 = 15$

(3) $I + \frac{1}{2}E - 1 = 6 + \frac{15}{2} - 1 = 12.5$

(4) $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$ □



演習問題 2.5 次の領域 D について以下の問いに答えてください。

$$D: \quad x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 18$$

(1) D の境界線を除いた内部にある格子点の数 I を数えてください。
(2) D の境界上にある格子点の数 E を数えてください。
(3) $I + \frac{1}{2}E - 1$ を求めてください。
(4) D の面積を求めてください。

演習問題 2.6 3 点 $A(0,2), B(6,4), C(3,6)$ の作る三角形 D について、以下の問いに答えてください。

(1) D の境界線を除いた内部にある格子点の数 I を数えてください。
(2) D の境界上にある格子点の数 E を数えてください。
(3) $I + \frac{1}{2}E - 1$ を求めてください。
(4) D の面積を求めてください。

定理 2.3.2 [Pick's theorem (G.A.Pick 1899)] 頂点が格子点であるような任意の多角形について、境界線上にある格子点の数を I、境界線を除いた内部にある格子点の数を E、面積を S とすると次が成り立ちます：

$$S = I + \frac{1}{2}E - 1.$$

2.4　Exercise

■いろいろ

演習問題 2.7 [横浜市大（一般・医）2018] $p^3 + q^3 = 35$ が成り立つような素数 p, q の組 (p, q) を全て求めてください。

演習問題 2.8 [一橋大（一般）2006] 次の条件 (a)、(b) をともにみたす直角三角形を考える。ただし、斜辺の長さを p、その他の 2 辺の長さを q, r とする。
(a) p, q, r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数である。
(b) $p + q + r = 132$

(1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ。
(2) p, q, r の組をすべて求めよ。

演習問題 2.9 袋の中に赤い玉が 3 個、白い玉が 2 個、黒い玉が 1 個入っています。袋の中から 3 個取り出した場合の色の組み合わせは何通りありますか。

演習問題 2.10 100 に約数は幾つありますか。

演習問題 2.11 $1, 2, 3, 3, 5$ から３つとって和が偶数になる可能性は何通りありますか？

演習問題 2.12 現在 2 名、2 名、1 名の 3 グループに分かれているとします。メンバーの入れ替えを行って、現在同じグループにいる人は次に同じグループに入らないようにする方法は何通りありますか？

■方程式・不等式の整数解

演習問題 2.13 方程式：$x + y + z = 15$ の非負整数解 (x, y, z) の個数を求めてください。

演習問題 2.14 [早稲田大（一般）2015] $x + y + z + w = 18, x \geq 8, y \geq 4, z \geq 2, w \geq 0$ を満たす整数 x, y, z, w の組 (x, y, z, w) の個数を求めてください。

演習問題 2.15 [明治大（一般）2016] 方程式 $a + b + c + 5d = 17$ を満たす a, b, c, d の 0 以上の整数解の組の総数を求めてください。

演習問題 2.16 不等式：$x+y+z \leq 8$ の正の整数解 (x, y, z) の個数を求めてください。

演習問題 2.17 m, n が相異なる正の整数のとき、$x_1+\cdots+x_m \leq n$ の非負整数解の個数と、$y_1+\cdots+y_n \leq m$ の非負整数解の個数は同じであることを示してください。

■格子点

演習問題 2.18 [名古屋大（一般） 2008]
(1) $3x+2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めてください。
(2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \leq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y, z) の個数を求めてください。

演習問題 2.19 [関西大（一般） 2021] n を正の整数とします。条件：$0 \leq y \leq -x^3+nx^2$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めてください。

演習問題 2.20 [東京海洋大（一般） 2023] 座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と言います。自然数 n に対して、座標平面において連立不等式

$$y \leq -\frac{1}{3}x^2+3n^2, \qquad x \geq 0, y \geq 0$$

によって表される領域を D_n とします。
(1) D_1 に含まれる格子点の総数を求めてください。
(2) D_n に含まれ、かつ直線 $x=0$ 上にある格子点の総数を n を用いて表してください。
(3) D_n に含まれ、かつ直線 $x=1$ 上にある格子点の総数を n を用いて表してください。
(4) 自然数 k に対して、D_n に含まれ、かつ直線 $x=3k-2$ 上にある格子点の総数を k, n を用いて表してください。
(5) D_n に含まれる格子点の総数を n を用いて表してください。

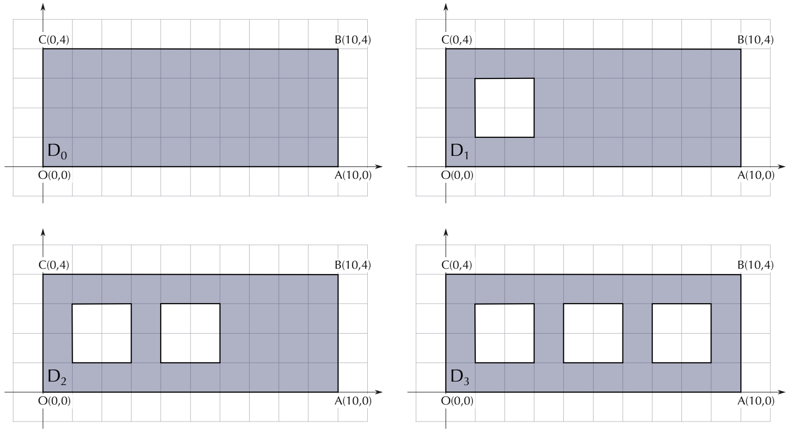
演習問題 2.21 [東北大（一般） 2018(後)] xy 平面において、x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよびます。m を正の整数とするとき、放物線 $y=x^2-2mx+m^2$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とします。
(1) D の周上の格子点の数 L_m を m で表してください。
(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表してください。
(3) D の面積を S_m とします。$\lim_{m\to\infty}\frac{T_m}{S_m}$ を求めてください。

演習問題 2.22 [旭医大（一般） 2020] 座標平面上で x, y 座標がともに整数である点 (x, y) を格子点といいます。n を正の整数として、次の 3 つの不等式を同時に満たす領域を D_n とします。

$$y \geq x^2, \quad y \leq -x^2-2nx+4n^2, \quad 1 \leq x \leq n$$

領域 D_n に含まれる格子点の総数を a_n とするとき、次の各問いに答えてください。
(1) a_2 を求めてください。
(2) $n \geq 3$ のとき、a_n を求めてください。
(3) $n \geq 3$ のとき、領域 D_n の境界線上の格子点の総数を b_n とします。
(i) 領域 D_n の面積 S_n を求めてください。
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-\left(a_n-\frac{1}{2}b_n-1\right)}{n}$ を求めてください。

演習問題 2.23 次の各領域 D_j について、境界線上の格子点数 E、内部の格子点数 I、面積 S を求めてください。



S と I, E の間にはどんな関係があるように思われるでしょうか。

演習問題 2.24 Pick の定理を証明してください。

演習問題 2.25 Pick の定理を使って、頂点が格子点であるような正三角形は存在しないことを証明してください。

演習問題 2.26 [藤田医大（一般） 2023] xy 平面上の点 (p, q) について、p, q がともに整数のときこの点を格子点と呼びます。また e を自然対数の底とするとき、$p-\mathrm{e}$ または $p+\mathrm{e}$ のどちらかと、$q+\frac{1}{2}$ がともに整数のとき、この点を e 点と呼ぶことにします。例えば、$(p, q)=\left(1-\mathrm{e}, \frac{3}{2}\right)$ は e 点です。
次の問いに答えてください。ただし、素数の平方根と e が無理数であり、$2.7<\mathrm{e}<2.8$ であることは証明なしに用いてよいものとします。
(1) 2 つの格子点を結ぶ任意の線分は e 点を通らないことを示してください。
(2) 4 つの格子点を頂点とし、1 辺の長さが 1 の任意の正方形の内部にある e 点の個数を求めてください。
(3) 3 つの格子点を頂点とし、1 辺が x 軸に平行、1 辺が y 軸に平行な任意の直角三角形の面積は、この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示してください。
(4) 3 つの格子点を頂点とする任意の三角形の面積は、この三角形の内部にある e 点の個数の $\frac{1}{2}$ に等しいことを示してください。
(5) 3 つの格子点を頂点とする正三角形は存在しないことを示してください。