3　階乗と順列の総数

3.1　階乗

正の整数 n に対して、1 から n までの正の整数を全て掛け合わせた結果を $n!$ と書いて、n の階乗（factorial of n）と言います。

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

0 の階乗 $0!$ は 1 であると定義しますが、それはこう定義するといろいろな場面で正の整数に対する記述とうまく整合すると云う便宜上の理由からです。

階乗 $n!$ は n が大きくなるにつれて『驚くほど！』大きな数になります。

階乗 $n!$	指数 2^n	べき n^3
$1! = 1$	$2^1 = 2$	$1^3 = 1$
$2! = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3! = 6$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$4! = 24$	$2^4 = 16$	$4^3 = 64$
$6! = 720$	$2^6 = 64$	$6^3 = 216$
$8! = 40320$	$2^8 = 256$	$8^3 = 512$
$10! = 3628800$	$2^{10} = 1024$	$10^3 = 1000$
$15! = 1307674368000$	$2^{15} = 32768$	$15^3 = 3375$
$20! = 2432902008176640000$	$2^{20} = 1048576$	$20^3 = 8000$
$30! = 2.6525286 \times 10^{32}$	$2^{30} = 1073741824$	$30^3 = 27000$
$50! = 3.04140932 \times 10^{64}$	$2^{50} = 1.12589991 \times 10^{15}$	$50^3 = 125000$
$100! = 9.33262154 \times 10^{157}$	$2^{100} = 1.2676506 \times 10^{30}$	$100^3 = 1000000$

どうですか？　圧倒的ですよね。普段の計算では任意の多項式よりも早く発散する指数関数でも十分大きいなあと感じていたと思いますが、そんなの目じゃないですね。

これがどの程度大きいか近似評価したものに de Moivre's formula があります。

> de Moivre's formula　　$n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$　（K は定数）

後年定数 K が $\sqrt{2\pi}$ である事が J.Stirling, J.Binet によって示されました。これを使えば階乗をべきで置き換えて計算する事が出来、非常に便利です。以下に近似の様子を示しておきます：

n	3	5	10	20	100	1000
$n!$	6	120	3628800	2.433×10^{18}	9.333×10^{157}	4.0239×10^{2567}
$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	5.84	118	3598696	2.423×10^{18}	9.325×10^{157}	4.0235×10^{2567}

案外そんなに大きくない n でも良い近似になっている事が分かります。

de Moivre、あるいは Stirling の公式は、元々は面積比をうまく使って得られた結果でしょうが、証明するだけならはこんな感じでも出来ます：

$$r_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}}$$

と置き更に隣接項間の比 $\frac{r_n}{r_{n+1}}$ を見ると、

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n-1}}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

ですから e の定義によれば $\frac{r_n}{r_{n+1}} \to 1$（as $n \to \infty$）なので $n!$ と $n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$ は同じオーダーです。

整数とは限らない実数 z（別に複素数でも構いませんが）に対して z の階乗 $z!$ を定義する事は出来ませんが、Γ-関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt$$

を使う事によって定義する（と考える）方法もあります。部分積分によれば

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z \mathrm{e}^{-t}dt \\ &= \left[-t^z\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

と云う性質があり、これを繰り返し適用すれば

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!$$

となって、整数に於けるガンマ関数は階乗に一致しているのです。参考までに $\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ です。

あと、今回の講義では使いませんが、たまに出て来るのが２個飛ばしの整数の積です。

正の偶数 n に対して、2 から n までの全ての偶数の積を $n!!$ と書いて n の２重階乗（double factorial）と言います。

また、正の奇数 n に対しても、1 から n までの全ての奇数の積を同じ記号で $n!!$ と書いてやはり n の２重階乗と言います。

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$$
$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

この場合も便宜上、$0!! = (-1)!! = 1$ と定義します。

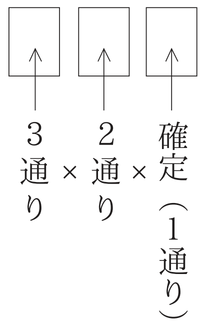
3.2　順列

問題 3.2.1 3 つの数字 1、2、3 を並べて出来る数の順列は幾つありますか？

辞書式に数えてみると

123	(1)	231	(4)
132	(2)	312	(5)
213	(3)	321	(6)

の 6 個ですが、こう云うやり方には限界がありますので次の様に考えます。



3 つの数字を左から順に並べる時に、まず最初の 1 つの選び方は 3 通りあります。そしてそのそれぞれについて残りの数字は 2 つありますから、次の真ん中の数字の選び方は 2 通りあります。

するともう残りの数字は 1 つしかありませんから、最後、一番右に置く数字はこの時点で確定してしまいます。

以上により、可能性の総数は $3\times 2 = 6$ 通りです。　□

一般に、($1 \leq r \leq n$ として) 異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出して (左から) 一列に並べたものを、『(異なる) n 個から (異なる) r 個取り出す順列 (permutation)』と言います。

異なる順列の総数は、実際に数えてみると、一番最初にとるものの可能性は n 通りあり、そのそれぞれの場合について２番目のものには $n-1$ 通りの可能性があります。順次同じ様に数えて行けば一番右の最後のものの可能性は $n-r+1$ 残されている事が分かります（要するに前の手順までで $r-1$ 個はとってしまったので、最後の１個は残った $n-r+1$ 個の中から選ぶ事になります）。

従ってその総数は

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となっています（$0! = 1$ に注意）。この数の事を特別な記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す事にします。

> ただし、この記号は日本ではよく見掛けますが海外ではあまり見掛けません。その理由は『特に固有の記号を与えるに値しない』からだと思います。ですからこれを『順列の公式だ！！』と云って覚えようとする事自体が奇妙なことなんだと思います。海外では、強いて言えば、$n^{\underline{k}}$（the k-th falling factorial power of n）が使われるかな？階乗の一種（不完全な階乗）と云う感覚です。あと the Pochhammer symbol $(x)_n$ って云う書き方もあります。

特に $r = n$ のとき、${}_n\mathrm{P}_n = n!$ ですね。また $r = 0$ のときこの値は 1 になりますが、何もとらない可能性は 1 通りであると解釈すればよいでしょう。そう云う意味で、この式は $r = 0$ でも成り立っています。

演習問題 3.1 [教科書問題 19.5] 次の値を求めて下さい。

(1) ${}_8\mathrm{P}_3$　(2) ${}_9\mathrm{P}_2$　(3) ${}_6\mathrm{P}_6$

(1) ${}_8\mathrm{P}_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

(2) ${}_9\mathrm{P}_2 = 9 \cdot 8 = 72$

(3) ${}_6\mathrm{P}_6 = 6! = 720$ □

3.3 Exercise

演習問題 3.2 [教科書問題 19.6] 10 人からなる委員会で、委員長、副委員長、書記を 1 人ずつ選出するとき、その方法は何通りありますか。

演習問題 3.3 [教科書問題 19.7] 6 個の数字 0、1、2、3、4、5 の中から異なる 4 個を並べて出来る 4 桁の整数は全部で何個ありますか。

演習問題 3.4 [教科書問題 19.8] 6 人が手をつないで輪を作るとき、その並び方は何通りありますか。

演習問題 3.5 5 種類のビーズが 1 つずつあります。これを繋げて数珠をつくります。何通り作れますか？

演習問題 3.6 区別された箱が 4 つ並んでいます。各箱に 1〜3 個のボールを入れるとき入れ方は何通りありますか？

演習問題 3.7 [教科書問題 19.9] 5 種類の数字 0、1、2、3、4 を用いて（並べて）できる 4 桁の整数は何個ありますか。

Exercise 解答篇

演習問題 3.2 [教科書問題 19.6] 10 人からなる委員会で、委員長、副委員長、書記を 1 人ずつ選出するとき、その方法は何通りありますか。

3 人取り出して一列に並べたもの（順列）を、一番左の人が委員長、真ん中の人が副委員長、右端の人が書記と云う風に解釈すれば、題意の方法の総数は異なる 10 人の中から異なる 3 人を選んで並べた順列の総数に一致しますから答えは以下の通りです：

$$ {}_{10}\mathrm{P}_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ 通り}. $$

□

演習問題 3.3 [教科書問題 19.7] 6 個の数字 0、1、2、3、4、5 の中から異なる 4 個を並べて出来る 4 桁の整数は全部で何個ありますか。

6 個の中から一つずつとって左から順に並べるものとします。

まず最初の 1 個はこれが 0 だと出来上がりは 4 桁になりませんから、0 以外の 5 通りの選び方があります。そしてそのそれぞれの場合に対して、それ以降の 3 つは残ったものの中から好きに選べるので残り 5 つから異なる 3 つをとって並べる順列の総数 ${}_5\mathrm{P}_3$ だけあります。

従って、求める総数は以下の通りです：

$$ 5 \cdot {}_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \text{ 個}. $$

□

演習問題 3.4 [教科書問題 19.8] 6 人が手をつないで輪を作るとき、その並び方は何通りありますか。

回転して同じ並びになるものは区別しないので取り敢えず 6 人のうち一人を固定して彼の位置が 12 時の位置に来る様にして考えると、残りの 5 人は時計回りに自由に並べられるので求める総数は異なる 5 人を並べる順列の総数 ${}_5\mathrm{P}_5 = 5! = 120$ です。 □

演習問題 3.5 5 種類のビーズが 1 つずつあります。これを繋げて数珠をつくります。何通り作れますか？

回転して同じものは区別しませんので、5 種類のうち 1 つを固定していつもそれが 12 時の位置にあるものと考えてヴァリエーションを数えます。すると、その他の 4 つは自由に繋げられる事から $4! = 24$ 通りのヴァリエーションがあります。

ただし、数珠ですから、裏返して同じものも同じと判断しますのでヴァリエーションは半分の 12 通りです。 □

演習問題 3.6 区別された箱が 4 つ並んでいます。各箱に 1〜3 個のボールを入れるとき入れ方は何通りありますか？

各箱ごとに 1〜3 個の 3 通りありますから、全部で $3^4 = 81$ 通りです。 □

演習問題 3.7 [教科書問題 19.9] 5 種類の数字 0、1、2、3、4 を用いて（並べて）できる 4 桁の整数は何個ありますか。

“5 個の数字” ではなく “5 種類” と言っているから、同じ数字は何回でも使って良い。4 桁のうち千の位は 0 以外の数でなければならないからここの可能性は 4 通りあります。そしてそのそれぞれについて、残りの 3 桁は自由に選べるので各桁ごとに 5 通りあるので求める総数は $4 \cdot 5^3 = 500$ 個 です。 □

3.4 勉強法に関する注意

これらの問題は『円順列』『数珠順列』や『重複順列』などと呼ばれ、答えの公式も紹介されている事が多いですが、見た様に特に難しい事はありませんので公式など覚えるには値せず、その都度考えて数えた方が良いでしょう。その方がコツも掴み易いですし、良い練習になります。公式を暗記してそれを使って答えを書いても数学的には何の練習にもなりません。そこには思考がないからです。

いや、そもそも順列の総数 ${}_n\mathrm{P}_r$ 自体、覚える必要はないでしょう。ただこう云う記号があると、その紹介まで。