

3 階乗と順列の総数

3.1 階乗

階乗 $n!$ は n が大きくなるにつれて『驚くほど!』大きな数になります。

階乗 $n!$	指数 2^n	べき n^3
$1! = 1$	$2^1 = 2$	$1^3 = 1$
$2! = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3! = 6$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$4! = 24$	$2^4 = 16$	$4^3 = 64$
$6! = 720$	$2^6 = 64$	$6^3 = 216$
$8! = 40320$	$2^8 = 256$	$8^3 = 512$
$10! = 3628800$	$2^{10} = 1024$	$10^3 = 1000$
$15! = 1307674368000$	$2^{15} = 32768$	$15^3 = 3375$
$20! = 2432902008176640000$	$2^{20} = 1048576$	$20^3 = 8000$
$30! = 2.6525286 \times 10^{32}$	$2^{30} = 1073741824$	$30^3 = 27000$
$50! = 3.04140932 \times 10^{64}$	$2^{50} = 1.12589991 \times 10^{15}$	$50^3 = 125000$
$100! = 9.33262154 \times 10^{157}$	$2^{100} = 1.2676506 \times 10^{30}$	$100^3 = 1000000$

de Moivre's formula	$n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ (K は定数)
---------------------	---

(後年定数 K が $\sqrt{2\pi}$ である事が J.Stirling, J.Binet によって示されました)。

n	3	5	10	20	100	1000
$n!$	6	120	3628800	2.433×10^{18}	9.333×10^{157}	4.0239×10^{2567}
$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$	5.84	118	3598696	2.423×10^{18}	9.325×10^{157}	4.0235×10^{2567}

ガンマ関数：
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

部分積分によれば

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)$$

と云う性質があり、これを繰り返し適用すれば

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = n!$$

$$\frac{1}{2}! = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2重階乗：
$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$$
$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

便宜上、 $0!! = (-1)!! = 1$ と定義します。

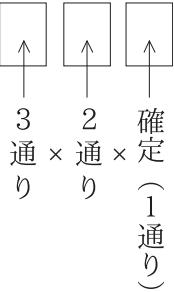
3.2 順列

問題 3.2.1 3つの数字 1、2、3 を並べて出来る数の順列は幾つありますか？

辞書式に数えてみると

123	(1)	231	(4)
132	(2)	312	(5)
213	(3)	321	(6)

の 6 個ですが、こう云うやり方には限界がありますので次の様に考えます。



3つの数字を左から順に並べる時に、まず最初の1つの選び方は3通りあります。そしてそのそれぞれについて残りの数字は2つありますから、次の真ん中の数字の選び方は2通りあります。

するともう残りの数字は1つしかありませんから、最後、一番右に置く数字はこの時点で確定してしまいます。

以上により、可能性の総数は $3 \times 2 = 6$ 通りです。 □

一般に、($1 \leq r \leq n$ として)異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出して(左から)一列に並べたものを、『(異なる) n 個から(異なる) r 個取り出す順列(permutation)』と言います。

異なる順列の総数は、

$$\underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となっています ($0! = 1$ に注意)。この数の事を特別な記号 ${}_nP_r$ で表す事にします。

演習問題 3.1 [教科書問題 19.5] 次の値を求めて下さい。

$$(1) {}_8P_3 \quad (2) {}_9P_2 \quad (3) {}_6P_6$$

3.3 Exercise

演習問題 3.2 [教科書問題 19.6] 10人からなる委員会で、委員長、副委員長、書記を1人ずつ選出するとき、その方法は何通りありますか。

演習問題 3.3 [教科書問題 19.7] 6個の数字0、1、2、3、4、5の中から異なる4個を並べて出来る4桁の整数は全部で何個ありますか。

演習問題 3.4 [教科書問題 19.8] 6人が手をつないで輪を作るとき、その並び方は何通りありますか。

演習問題 3.5 5種類のビーズが1つずつあります。これを繋げて数珠をつくります。何通り作れますか？

演習問題 3.6 区別された箱が4つ並んでいます。各箱に1~3個のボールを入れるとき入れ方は何通りありますか？

演習問題 3.7 [教科書問題 19.9] 5種類の数字0、1、2、3、4を用いて(並べて)できる4桁の整数は何個ありますか。