# 3 階乗と順列の総数

## 3.1 階乗

階乗 $n!$ は $n$ が大きくなるにつれて『驚くほど！』大きな数になります。

| 階乗 $n!$ | 指数 $2^n$ | べき $n^3$ |
|---|---|---|
| $1! = 1$ | $2^1 = 2$ | $1^3 = 1$ |
| $2! = 2$ | $2^2 = 4$ | $2^3 = 8$ |
| $3! = 6$ | $2^3 = 8$ | $3^3 = 27$ |
| $4! = 24$ | $2^4 = 16$ | $4^3 = 64$ |
| $6! = 720$ | $2^6 = 64$ | $6^3 = 216$ |
| $8! = 40320$ | $2^8 = 256$ | $8^3 = 512$ |
| $10! = 3628800$ | $2^{10} = 1024$ | $10^3 = 1000$ |
| $15! = 1307674368000$ | $2^{15} = 32768$ | $15^3 = 3375$ |
| $20! = 2432902008176640000$ | $2^{20} = 1048576$ | $20^3 = 8000$ |
| $30! = 2.6525286 \times 10^{32}$ | $2^{30} = 1073741824$ | $30^3 = 27000$ |
| $50! = 3.04140932 \times 10^{64}$ | $2^{50} = 1.12589991 \times 10^{15}$ | $50^3 = 125000$ |
| $100! = 9.33262154 \times 10^{157}$ | $2^{100} = 1.2676506 \times 10^{30}$ | $100^3 = 1000000$ |

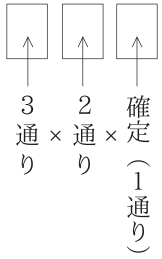
Stirling's formula $\qquad n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$

| $n$ | 3 | 5 | 10 | 20 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 6 | 120 | 3628800 | $2.433 \times 10^{18}$ | $9.333 \times 10^{157}$ | $4.0239 \times 10^{2567}$ |
| $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ | 5.84 | 118 | 3598696 | $2.423 \times 10^{18}$ | $9.325 \times 10^{157}$ | $4.0235 \times 10^{2567}$ |

2 重階乗： $\begin{cases} (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \\ (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \end{cases} \qquad 0!! = (-1)!! = 1$

## 3.2 異なるものの順列

**問題 3.2.1** 3 つの数字 1、2、3 を並べて出来る数の順列は幾つありますか？




まず最初の 1 つの選び方は 3 通りあります。そしてそのそれぞれについて残りの数字は 2 つありますから、次の真ん中の数字の選び方は 2 通りあります。

するともう残りの数字 1 つはこの時点で確定してしまいます。

以上により、可能性の総数は $3 \times 2 = 6$ 通りです。 □

一般に、($1 \leq r \leq n$ として) 異なる $n$ 個のものの中から異なる $r$ 個を取り出して (左から) 一列に並べたものを、『(異なる) $n$ 個から (異なる) $r$ 個取り出す順列 (permutation)』と言います。その総数：

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

**演習問題 3.1 [ 教科書問題 19.5 ]** 次の値を求めて下さい。

(1) ${}_8\mathrm{P}_3$ (2) ${}_9\mathrm{P}_2$ (3) ${}_6\mathrm{P}_6$

## 3.3 同じものを含む順列

### 3.3.1 全部使う場合

**問題 3.3.1** $1, 1, 1, 2, 3$ の 5 個の文字を 1 列に並べる方法は何通りありますか。

まず 3 つの 1 を区別するために $1_a, 1_b, 1_c$ とします。

すると 5 つの『異なる文字』$1_a, 1_b, 1_c, 2, 3$ を並べる方法は $5!$ 通りありますが、この中には 1 の区別を止めれば同じになってしまうものが含まれています。

区別あり：　$1_a21_c1_b3,\quad 1_a21_b1_c3,\quad 1_b21_c1_a3,\quad 1_b21_a1_c3,\quad 1_c21_a1_b3,\quad 1_c21_b1_a3$

$$\downarrow$$

区別なし：　$12113$

（1 を区別した）１つの順列から 1 だけを同じ位置関係で抽出すれば 3 つの異なる１の順列が得られますが、$1_a, 1_b, 1_c$ の並べ方は $3!$ 通りありますから、1 の区別をやめたときに全く同じものになってしまう順列が 6 個ずつあることが分かります。

つまり、全部で $5!$ ある順列は、6 個ずつのグループに分かれていて、各グループに属する順列は 1 の区別を止めれば同じ順列になります。

従って、求める並べ方の総数は、この『グループの総数』であり、それは

$$\frac{5!}{6} = 20$$

です。 □

**演習問題 3.2** $1, 1, 2, 2, 3, 4$ を並べて出来る 6 桁の数は何種類ありますか。

### 3.3.2　一部しか使わない場合

**問題 3.3.2 [ 教科書　例題 19.1 ]** $1, 1, 1, 2, 3$ の 5 個の数字から 3 個とって並べて出来る数のうち、異なるものは幾つありますか。

並べて出来る（3 桁の）数が異なればそれは区別して数えるわけですから、例えば $1, 1, 3$ をとった場合並べ方は $113, 131, 311$ の 3 通りあり、全て区別して数えます。

【全部書き出す方法】和のような場合は大きな方から攻めた方がやり易い気がしますが、小さな方から並べた方が良いこともあります。広い意味で、そう言った並べ方を『辞書式』と言います。

この問題も出来る数字の小さい方から順に考えて行くとやり易いでしょう。まず 100 の位が小さいものから始めて、その中で 1 の位から少しずつ大きくして行きます。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | (1) | 121 | (4) | 132 | (7) | 231 | (10) |
| 112 | (2) | 123 | (5) | 211 | (8) | 311 | (11) |
| 113 | (3) | 131 | (6) | 213 | (9) | 312 | (12) |
| | | | | | | 321 | (13) |

【1 の個数で場合分けする方法】1 を 1 個しか使わないものは、$1, 2, 3$ の順列ですから、$3! = 6$ 個あります。

1 を 2 個使うものは、3 つ並べたときにどこが１でないかで 3 通り、その１でない数が２なのか３なのかで 2 通り、合計 6 通りあります。

1 を 3 つ使うものは 1 通りしかありません。

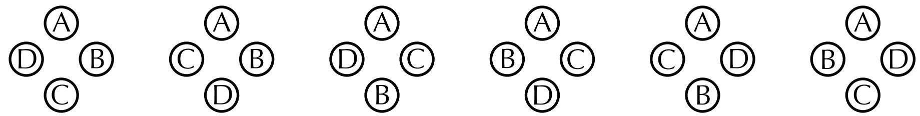
以上から、合計で $6 + 6 + 1 = 13$ 通りあります。 □

**演習問題 3.3** アルファベット a,b,b,c,d の中から 3 つとって並べて得られる文字列の可能性は何通りありますか？

## 3.4　円順列

**問題 3.4.1** $A, B, C, D$ の 4 つの文字を円形に並べる方法は何通りありますか。ただし、回転して同じものは区別しません。

$A$ が 12 時の位置に来るように回転した上で比較検討する。




そうすると、$A$ から時計回りに残りの 3 文字がどう並んでいるかが問題であり、並び方は３文字の順列と同じだけありますから、全部で $3! = 6$ 個です。 □

**演習問題 3.4** 7 種類 1 個ずつの文字を円形に並べる方法は何通りありますか。ただし、回転して同じものは区別しません。

**問題 3.4.2** $A, A, B, C, D, D, D$ の 7 つの文字を円形に並べる方法は何通りありますか。ただし、回転して同じものは区別しません。

$C$ が 12 時の位置に来るようにした上で検討すると、残りの 6 文字の並べ方の数だけ円順列がありますから、$A, D$ の重複を考慮して

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

通りあります。 □

**演習問題 3.5** 黒玉 1 つ、青玉 2 つ、赤玉 3 つを円形に並べる方法は何通りありますか。ただし、回転して同じものは区別しません。

## 3.5 Exercise

**演習問題 3.6 [ 教科書問題 19.6 ]** 10 人からなる委員会で、委員長、副委員長、書記を 1 人ずつ選出するとき、その方法は何通りありますか。

**演習問題 3.7 [ 教科書問題 19.7 ]** 6 個の数字 0、1、2、3、4、5 の中から異なる 4 個を並べて出来る 4 桁の整数は全部で何個ありますか。

**演習問題 3.8** 1、2、3、4、5、6 から異なる 3 つの数をとって並べて出来る 3 桁の数について以下の問いに答えてください。

(1) 最も小さいものから小さい順に 5 個、最も大きいものから大きい順に 5 個書いてください。

(2) そのような数は全部でいくつありますか。

(3) そのような数全部の総和を求めてください。

**演習問題 3.9 [ 教科書問題 19.8 ]** 6 人が手をつないで輪を作るとき、その並び方は何通りありますか。

**演習問題 3.10** 5 種類のビーズが 1 つずつあります。これを繋げて数珠をつくります。何通り作れますか？

**演習問題 3.11** 区別された箱が 4 つ並んでいます。各箱に 1〜3 個のボールを入れるとき入れ方は何通りありますか？

**演習問題 3.12 [ 教科書問題 19.9 ]** 5 種類の数字 0、1、2、3、4 を用いて（並べて）できる 4 桁の整数は何個ありますか。

**演習問題 3.13**** 赤玉 3 つ、白玉 6 つを円形に並べる方法は何通りありますか。ただし、回転して同じものは区別しません。

**演習問題 3.14 [ 2018 慶應大（一般入試・医） ]**** $k$ を自然数とし、赤い玉と白い玉がそれぞれ $2k$ 個ずつあります。これらをすべて円周上に等間隔に並べる並べ方の総数を $N_k$ とおくと、

$$N_1 = \boxed{\text{(お)}}, \quad N_2 = \boxed{\text{(か)}}, \quad N_3 = \boxed{\text{(き)}}$$

です。ただし、回転して並びが同じになるものは同じ並べ方と考えます。