

4 組み合わせ

n 個の異なるものがあつた時に、その中から r 個 ($1 \leq r \leq n$) 取り出す事を考えます。取り出す順番を考慮に入れた場合 (たとえば順に左から並べた場合など) は前節に学んだ順列と云うものになり、その総数は $n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) (= {}_n P_r)$ でした。

では取り出す順番は考えず、取り出した r 個をひとまとまりとして扱い、組み合わせとしてどれだけの可能性があるかを考えるとどうなるでしょうか。

4.1 組み合わせの総数

例えば異なる4文字 a,b,c,d から異なる3つを取り出した場合、例えば3つの文字 a,c,d で構成されている順列 (順序も考慮して並べたもの) は 3! 個ありますが、これらは全て同じメンバーの並べ替えになっており、組み合わせとしては同じものと考えます。これはどの3つから作られる順列でも同じで各グループごとに 3! 種類の順列があります。

組み合わせ	順列
$\{a, b, c\}$	(abc) (acb) (bac) (bca) (cab) (cba)
$\{a, b, d\}$	(abd) (adb) (bad) (bda) (dab) (dba)
$\{a, c, d\}$	(acd) (adc) (cad) (cda) (dac) (dca)
$\{b, c, d\}$	(bcd) (bdc) (cbd) (cdb) (dbc) (dcb)
4 通り	2 4 通り

従って異なる4つから3つ取り出す組み合わせの総数は順列の総数 $4 \cdot 3 \cdot 2$ を 3! で割ったものになる筈です。

一般に異なる n 個から r 個を取り出す組み合わせの総数は $n(n-1) \cdots (n-r+1)$ を $r!$ で割ったものになりますが、これを記号 $\binom{n}{r}$ (読み方は "n choose r") で表します：

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = {}_n C_r.$$

しかし右端に書いたように同じ意味で ${}_n C_r$ と云う記号があつて、特に日本ではむしろこちらの方が (特に高校では) 普通になっていますのでこの講義でも教科書に合わせこちらの方の記号を使うことにします。ただし、海外では一般的ではありません。

また、 ${}_n C_0 = 1$ となりますが、順列同様、何もとらない可能性は 1 通りと考えます。

例えば ${}_9 C_6$ のとき、分子が丁度 6 個の積：

$$\underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{6 \text{ 個}} \quad (= {}_9 P_6)$$

であつた事と、分母の 6! も 6 個の積である事に注意して分子・分母共に 6 個の積を計算すれば良い事になります：

$${}_9 C_6 = \frac{\overbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}^{6 \text{ 個}}}{\underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6 \text{ 個}}}$$

しかしこの右辺を見ると、分子と分母が同じ因数 $6 \cdot 5 \cdot 4$ を持っているのでこの部分は約分されてしまい、結果的には分母・分子共に 3 つの積になってしまいます。これは ${}_9 C_3$ に等しい筈です：

$${}_9 C_6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = {}_9 C_3.$$

実際、順列の総数を階乗を使って表したものをええば

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

と書けますから、

$${}_n C_{n-r} = \frac{n!}{(n - \{n-r\})! (n-r)!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}_n C_r$$

が成り立っているのです。

従って、 ${}_9 C_6$ の様に取り出す個数の部分が大きい時は r のところを $n-r$ で代用してやった方がすっきりします (まあ、いずれにせよ結果は一緒ですけどね)。

この式の意味は、異なる n 個から r 個とることは、異なる n 個から $n-r$ 個をとらないことに等しく、従ってそのヴァリエーションの総数は一致すると云うわけです。

演習問題 4.1 [教科書問題 19.10] 次の値を求めて下さい。

$$(1) {}_5 C_2 \quad (2) {}_6 C_3 \quad (3) {}_8 C_6$$

$$(1) {}_5 C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10. \quad (2) {}_6 C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

$$(3) {}_8 C_6 = {}_8 C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28.$$

4.2 組み合わせの総数を使って数えること

某かのグループの中から特定の個数をグループとして（組み合わせとして）取り出す場合、別に組み合わせの総数がどうなるのかを知らなくても一から数えれば良いわけで、まず順列を取り出して、それを取り出す個数の階乗で割って... と地道にやってみて出来ないことはありません。でもそれはなかなか大変ですので矢張り組み合わせの総数が ${}_nC_r$ となる事を積極的に使って数えて行った方が良いでしょう。

問題 4.2.1 [教科書例題 19.5] 男子 6 人、女子 3 人のグループから次のような代表を選ぶ選び方は何通りありますか。

- (1) 男女の区別なく 3 人を選ぶ。
- (2) 男子 2 人、女子 1 人の代表を選ぶ。

(1) 合計 9 人の中から 3 人を選ぶのでその総数は

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

通りです。

(2) まず男子 6 人の中から 2 人選ぶ選び方は ${}_6C_2$ 通りあり、そのおのおのに対して女子 3 人の中から 1 人選ぶ選び方は 3 通りずつありますから、合計では

$${}_6C_2 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 3 = 45$$

通りです。

□

演習問題 4.2 [教科書問題 19.11] 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき、表が 4 回出る場合は何通りありますか。

10 回の結果のうち 4 回が表、6 回が裏だから、4 が出たのが何回目であるか考えて ${}_{10}C_4$ 通りの場合があります。

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

従って 210 通りです。

□

演習問題 4.3 [教科書問題 19.12]

右図のように縦線 5 本と横線 4 本で出来ている図形の中に長方形は何個ありますか。



長方形に対してその横幅を決定している 2 本の縦線と縦の幅を決定している 2 本の横線に対応させることが出来ます。また、逆に縦線 2 本と横線 2 本を指定すれば長方形が定まり、異なる組み合わせに対応する長方形は必ず異なります。

従って長方形の個数は異なる縦線 2 本・横線 2 本の選び方の数だけあり、それは

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

から 60 個です。

□

4.3 2 項展開

$(a+b)^8$ を展開するとどうなるのでしょうか。頑張って展開すれば出来ないことはありませんが、少し頭を使ってみましょう。分かり易くするために 8 個の括弧を全て区別して、中に入っている a, b を a_j, b_j と書く事にしましょう：

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_8 + b_8)$$

例えばこれを、4 番目の括弧で展開すれば

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1) \cdots (a_8 + b_8) &= (a_1 + b_1) \cdots (a_3 + b_3) a_4 (a_5 + b_5) \cdots (a_8 + b_8) \\ &\quad + (a_1 + b_1) \cdots (a_3 + b_3) b_4 (a_5 + b_5) \cdots (a_8 + b_8) \\ &= (\text{因子として } a_4 \text{ を含むが } b_4 \text{ は含まないもの}) \\ &\quad + (\text{因子として } b_4 \text{ を含むが } a_4 \text{ は含まないもの}) \end{aligned}$$

となっていますから、展開した時の 1 つ 1 つの項には a_4 か b_4 のどちらか一方のみが必ず因子として入っています。

どの括弧について展開しても同じことが云えますから結局、展開した時の各項には a_1, b_1 のうちのどちらか一方、 a_2, b_2 のうちのどちらか一方、...、 a_8, b_8 のうちのどちらか一方が因子として必ず含まれています。

従って展開した時の各項は、 $c_1c_2\cdots c_8$ （ただし c_j は a_j か b_j のいずれか）と云う形であり、そのような全ての組み合わせが結果として出て来る筈です。必ず8つの積になると云うことと、その8つは a_j, b_j のどちらかであると言うことが大切です。

しかし本来は a_j はすべて a であり、 b_j はすべて b でしたから、例えば

$$a_1a_2a_3b_4a_5b_6a_7a_8, \quad b_1a_2a_3a_4b_5a_6a_7a_8$$

はどちらも a^6b^2 であって同じものです。この様に同じものが沢山ありますから、足し合わせてまとめることにすれば、その時の係数は『同じものの個数』になる筈です。

では同じものは幾つあるかと云うと、8つの c_j のうち幾つが a_j であるかで決まってしまう（残りは全て b_j になってしまいますからね）ので、例えば展開した時の項で a^6b^2 と同じものは ${}_8C_6$ 個あります。

以上から、 $(a+b)^8$ を展開すると

$$\begin{aligned} (a+b)^8 = & {}_8C_0a^8b^0 + {}_8C_1a^7b + {}_8C_2a^6b^2 + {}_8C_3a^5b^3 + {}_8C_4a^4b^4 \\ & + {}_8C_5a^3b^5 + {}_8C_6a^2b^6 + {}_8C_7a^1b^7 + {}_8C_8a^0b^8 \end{aligned}$$

となる事が分かります。

同じものの個数を数える時に8つの c_j のうち幾つが b_j であるかで数えても良いわけで、その場合は a^6b^2 と同じものは ${}_8C_2$ 個とカウントされ、展開式は

$$\begin{aligned} (a+b)^8 = & {}_8C_0a^8b^0 + {}_8C_1a^7b + {}_8C_2a^6b^2 + {}_8C_3a^5b^3 + {}_8C_4a^4b^4 \\ & + {}_8C_5a^3b^5 + {}_8C_6a^2b^6 + {}_8C_7a^1b^7 + {}_8C_8a^0b^8 \end{aligned}$$

となって一見さっきの展開式と違っていますが、 ${}_8C_j = {}_8C_{8-j}$ だったので、どちらで数えても結果は同じです。

一般に、 $(a+b)^n$ を展開すると

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_nC_r a^r b^{n-r}$$

となります。これを2項展開と言い、その係数 ${}_nC_r$ を2項係数と言います。

演習問題 4.4 [教科書問題 19.17] 二項定理を用いて次の式を展開して下さい。

$$(1) (x+y)^6 \quad (2) (x-2y)^5$$

$$\begin{aligned} (x+y)^6 &= {}_6C_0x^0y^6 + {}_6C_1x^1y^5 + {}_6C_2x^2y^4 \\ &\quad + {}_6C_3x^3y^3 + {}_6C_4x^4y^2 + {}_6C_5x^5y^1 + {}_6C_6x^6y^0 \\ &= y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-2y)^5 &= {}_5C_0x^0(-2y)^5 + {}_5C_1x^1(-2y)^4 + {}_5C_2x^2(-2y)^3 \\ &\quad + {}_5C_3x^3(-2y)^2 + {}_5C_4x^4(-2y)^1 + {}_5C_5x^5(-2y)^0 \\ &= -32y^5 + 80xy^4 - 80x^2y^3 + 40x^3y^2 - 10x^4y + x^5 \end{aligned}$$

□

4.4 Pascal の3角形

例えば5乗までの2項係数のみを書き

出すと右図のようになっており、この様に3角形状に2項係数を並べたものを Pascal の3角形と言う事があります。見て分かる通り左右対称ですね。これは前に見た ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ を意味しています。

$$\begin{array}{ccccccccccc} n=1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & & 1 & & & \\ n=2 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ n=3 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n=4 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & \\ n=5 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & \\ & & & & & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

また、各段の両端は共に1であり、それ以外の各係数は右上の数字と左上の数字の和になっている事にも気が付く筈です。これを数式で表現すると

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

となります。実際、

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!r!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} \\ &= \frac{r(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{(n-r)!r!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\ &= {}_nC_r \end{aligned}$$

と云う風に計算で確かめることも出来ます。

4.5 展開時の係数を求める問題

問題 4.5.1 [教科書例題 19.8] $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ の展開式で x^6 の係数を求めて下さい。

展開したときの一般項は

$${}_6C_m (x^2)^m \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-m} = (-1)^{6-m} {}_6C_m x^{3m-6}$$

ですから、これが x^6 の項であるためには $m = 4$ であれば良く、その時の係数は

$$(-1)^2 {}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

です。

□

演習問題 4.5 [教科書問題 19.18] $(2x - \frac{1}{x^2})^7$ の展開式で x^4 の係数および $\frac{1}{x^2}$ の係数を求めて下さい。

展開したときの一般項は

$${}_7C_m (2x)^m \left(-\frac{1}{x^2}\right)^{7-m} = (-1)^{7-m} 2^m {}_7C_m x^{3m-14}$$

ですから、これが x^4 の項であるためには $m = 6$ であれば良く、その時の係数は

$$(-1)^1 2^6 {}_7C_6 = -448$$

です。一方、この項が $\frac{1}{x^2}$ であるためには $m = 4$ であれば良く、その時の係数は

$$(-1)^3 2^4 {}_7C_4 = -560$$

となります。

□