

4 組み合わせ

n 個の異なるものがあつた時に、その中から r 個 ($1 \leq r \leq n$) 取り出す事を考えます。取り出す順番を考慮に入れた場合 (たとえば順に左から並べた場合など) は前節に学んだ順列と云うものになり、その総数は $n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) (= {}_n P_r)$ でした。

では取り出す順番は考えず、取り出した r 個をひとまとまりとして扱い、組み合わせとしてどれだけの可能性があるかを考えるとどうなるのでしょうか。

4.1 組み合わせの総数

組み合わせ	順列
$\{a, b, c\}$	(abc) (acb) (bac) (bca) (cab) (cba)
$\{a, b, d\}$	(abd) (adb) (bad) (bda) (dab) (dba)
$\{a, c, d\}$	(acd) (adc) (cad) (cda) (dac) (dca)
$\{b, c, d\}$	(bcd) (bdc) (cbd) (cdb) (dbc) (dcb)
4 通り	24 通り

一般に異なる n 個から r 個を取り出す組み合わせの総数は $n(n-1) \cdots (n-r+1)$ を $r!$ で割ったものになりますが、これを記号 $\binom{n}{r}$ (読み方は "n choose r") で表します:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = {}_n C_r.$$

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$${}_n C_{n-r} = \frac{n!}{(n - \{n-r\})! (n-r)!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}_n C_r$$

演習問題 4.1 [教科書問題 19.10] 次の値を求めて下さい。

(1) ${}_5 C_2$ (2) ${}_6 C_3$ (3) ${}_8 C_6$

4.2 組み合わせの総数を使って数えること

問題 4.2.1 [教科書例題 19.5] 男子 6 人、女子 3 人のグループから次のような代表を選ぶ選び方は何通りありますか。

- (1) 男女の区別なく 3 人を選ぶ。
- (2) 男子 2 人、女子 1 人の代表を選ぶ。

(1) 合計 9 人の中から 3 人を選ぶのでその総数は

$${}_9 C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

通りです。

(2) まず男子 6 人の中から 2 人選ぶ選び方は ${}_6 C_2$ 通りあり、そのおのおのに対して女子 3 人の中から 1 人選ぶ選び方は 3 通りずつありますから、合計では

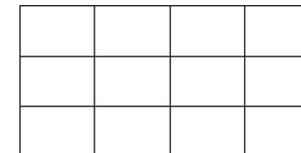
$${}_6 C_2 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 3 = 45$$

通りです。 □

演習問題 4.2 [教科書問題 19.11] 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき、表が 4 回出る場合は何通りありますか。

演習問題 4.3 [教科書問題 19.12]

右図のように縦線 5 本と横線 4 本で出来ている図形の中に長方形は何個ありますか。



4.3 2項展開

一般に、 $(a + b)^n$ を展開すると

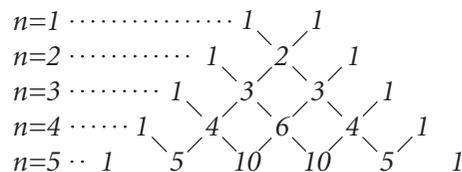
$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^r b^{n-r}$$

となります。これを2項展開と言い、その係数 ${}_n C_r$ を2項係数と言います。

演習問題 4.4 [教科書問題 19.17] 二項定理を用いて次の式を展開して下さい。

(1) $(x + y)^6$ (2) $(x - 2y)^5$

4.4 Pascal の3角形



$${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

4.5 展開時の係数を求める問題

問題 4.5.1 [教科書例題 19.8] $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ の展開式で x^6 の係数を求めて下さい。

展開したときの一般項は

$${}_6 C_m (x^2)^m \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-m} = (-1)^{6-m} {}_6 C_m x^{3m-6}$$

ですから、これが x^6 の項であるためには $m = 4$ であれば良く、その時の係数は

$$(-1)^2 {}_6 C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

です。 □

演習問題 4.5 [教科書問題 19.18] $(2x - \frac{1}{x^2})^7$ の展開式で x^4 の係数および $\frac{1}{x^2}$ の係数を求めて下さい。