

4 組み合わせ

n 個の異なるものがあつた時に、その中から r 個 ($1 \leq r \leq n$) 取り出す事を考えます。取り出す順番は考えず、取り出した r 個をひとまとまりとして扱い、組み合わせとしてどれだけの可能性があるかを考えるとどうなるでしょうか。

4.1 組み合わせの総数

組み合わせ	順列
$\{a, b, c\}$	(abc) (acb) (bac) (bca) (cab) (cba)
$\{a, b, d\}$	(abd) (adb) (bad) (bda) (dab) (dba)
$\{a, c, d\}$	(acd) (adc) (cad) (cda) (dac) (dca)
$\{b, c, d\}$	(bcd) (bdc) (cbd) (cdb) (dbc) (dcb)
4通り	24通り

異なる n 個から r 個を取り出す組み合わせの総数：

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_n C_r \quad {}_n C_{n-r} = {}_n C_r$$

演習問題 4.1 [教科書問題 19.10] 次の値を求めて下さい。

- (1) ${}_5 C_2$ (2) ${}_6 C_3$ (3) ${}_8 C_6$

4.2 組み合わせの総数を使って数えること

問題 4.2.1 [教科書例題 19.5] 男子6人、女子3人のグループから次のような代表を選ぶ選び方は何通りありますか。

- (1) 男女の区別なく3人を選ぶ。
 (2) 男子2人、女子1人の代表を選ぶ。

(1) 合計9人の中から3人を選ぶのでその総数は

$${}_9 C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

通りです。

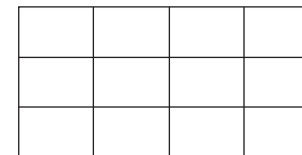
(2) まず男子6人の中から2人選ぶ選び方は ${}_6 C_2$ 通りあり、そのおののに対して女子3人の中から1人選ぶ選び方は3通りずつありますから、合計では

$${}_6 C_2 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 3 = 45$$

通りです。 □

演習問題 4.2 [教科書問題 19.11] 1枚の硬貨を10回投げるとき、表が4回出る場合は何通りありますか。

演習問題 4.3 [教科書問題 19.12]



右図のように縦線5本と横線4本で出来ている図形の中に長方形は何個ありますか。

4.3 2項展開

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^r b^{n-r}$$

これを2項展開と言い、その係数 ${}_n C_r$ を2項係数と言います。

演習問題 4.4 [教科書問題 19.17] 二項定理を用いて次の式を展開して下さい。

- (1) $(x+y)^6$ (2) $(x-2y)^5$

4.4 Pascalの3角形

$$\begin{array}{cccccccc}
 n=1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 n=2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 n=3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 n=4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 n=5 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

$${}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

4.5 展開時の係数を求める問題

問題 4.5.1 [教科書例題 19.8] $(x^2 - \frac{1}{x})^6$ の展開式で x^6 の係数を求めて下さい。

$$\text{一般項 } {}_6C_m (x^2)^m \left(-\frac{1}{x}\right)^{6-m} = (-1)^{6-m} {}_6C_m x^{3m-6}$$

ですから、これが x^6 の項であるためには $m = 4$ であれば良い：

$$(-1)^2 {}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

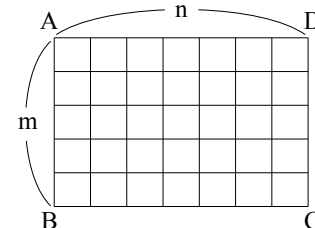
□

演習問題 4.5 [教科書問題 19.18] $(2x - \frac{1}{x^2})^7$ の展開式で x^4 の係数および $\frac{1}{x^2}$ の係数を求めて下さい。

4.6 Exercise

■組み合わせの基本

演習問題 4.6 m, n を自然数とします。長方形 ABCD があり、 $AB = m, AD = n$ とします。辺 AB を m 等分、辺 AD を n 等分して AB と AD に平行な線分を引き、一辺の長さが 1 の mn 個の正方形に分割をします。分割してできた小正方形の頂点を格子点と呼ぶことにします。



- (1) 格子点を頂点として、辺が AB, AD に平行な長方形の個数を求めて下さい。
- (2) (1) の長方形の面積の総和を求めて下さい。

演習問題 4.7 正九角形について以下の問いに答えてください。ただし、正九角形では、3 本以上の対角線が内部の 1 点で交わることはありません。

- (1) 対角線は何本ありますか。
- (2) 内部で交わる 2 本の対角線の組は何組ありますか。
- (3) 共有点をもたない 2 本の対角線の組数を求めてください。
- (4) 内部にある対角線の交点はいくつありますか。

演習問題 4.8 [2022 東北大 (一般)] $l + m + n = 99$ となる正の奇数解 (l, m, n) の総数を求めてください。

■展開の係数

演習問題 4.9 [2006 弘前大 (一般)] $(x + 5)^{80}$ を展開したとき、 x の何乗の係数が最大になるか答えてください。

演習問題 4.10 [2014 慶應大 (一般)] $(x + 1)^8 (x - 1)^4$ を展開したとき、 x^{10} の項の係数は (ウ) です。また $(x^2 + x + 1)^6$ を展開したとき、 x^{10} の項の係数は (エ) です。

演習問題 4.11 [2013 防衛医大 (一般)] ** $\frac{\sum_{r=0}^{20} {}_{20}C_r^2}{\sum_{r=1}^{19} {}_{20}C_{r-1} \cdot {}_{20}C_{r+1}}$ の値を求めてください。