

## 5 グループ分けの総数

### 5.1 人数固定グループ分け

問題 5.1.1 [教科書例題 19.6] 学生 6 人を次のように分ける方法は何通りありますか。

(1) 2 人ずつ A、B、C の 3 組に分ける。

(2) 組を区別しないで、2 人ずつ 3 組に分ける。

(1) まず A 組の 2 人の選び方は  ${}_6C_2$  通りあり、そのそれぞれに対して B 組の 2 人の選び方は  ${}_4C_2$  通りあります。この時点で残り 2 人は自動的に C 組に配分されます。

従って選び方は以下の通り：

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 90 \text{ 通り.}$$

(2) [ 解答例その 1、(1) の結果を使う方法 ]

(1) で考えた組み分けのうち、学生の組み分けは同じで配分先の組の名前だけ違っているものは名前の付け方の可能性分だけありますが、3 つの組に 3 通りの名前を割り振る方法は 3! 通りありますから、求める総数は 90 を 3! で割ったもの、すなわち、15 通りになります。

[ 解答例その 2、直接法 ]

6 人のうち 1 人の学生に注目しておきます。彼を Z 君としましょう。まず Z 君と同じ組になる人を選ぶ方法は 5 通りあります。そしてそのそれぞれに対して残りの 4 人を 2 組に分ける方法分だけ選び方があります。

4 人の学生を 2 人ずつ 2 つのグループに分ける方法は何通りあるか考えましょう。矢張りこの場合もそのうちの 1 人に注目しておきます。彼を Y 君とします。Y 君と同じ組になる人の選び方は 3 通りあり、この人を選んだ時点で残りの 2 人がもう一方のグループに入りますから全て決定してしまいます。従って、4 人を 2 人ずつ 2 組に分ける方法は 3 通りです。

以上から、求める選び方の総数は  $5 \times 3 = 15$  通りです。□

どちらかと言うと (1) を使って数えた方が分かり易いと思います。だから、(1) がなくていきなり (2) の様な問題であったとしても、自分で (1) をまず考えてみることをお勧めします。

演習問題 5.1 [教科書問題 19.13] 学生 8 人を次のように 3 つのグループに分けると、組み分けの方法は何通りありますか。

(1) A グループに 3 人、B グループに 3 人、C グループに 2 人。

(2) グループに名前をつけずに 3 人、3 人、2 人のグループに分ける。

(1) まず A グループの 3 人の選び方は  ${}_8C_3$  通りあります。そしてそのそれぞれの場合に対して C グループの 2 人の選び方は  ${}_5C_2$  通りあります。この時点で残りの 3 人が B グループに配属されますから全て決定します。

従って求める総数は

$${}_8C_3 \cdot {}_5C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

通りです。

(2) 【解答例その 1 (1) の結果を使う方法】グループに名前をつけない場合、3 人からなる A、B の 2 グループがグループごと入れ替わっているものは区別されません。従ってその可能性は C グループのメンバーを固定するごとに 2 通りありますから求める総数は (1) の結果を 2 で割って 280 通りです。

【解答例その 2 直接数える方法】まず 2 人グループのメンバーを確定する方法は  ${}_8C_2 = 28$  通りあります。そのそれぞれの場合について残りの 6 人を 3 人ずつ 2 グループに分ける方法を考えます。

6 人から 3 人とする組み合わせの総数は  ${}_6C_3 = 20$  通りありますが、ある 3 人を選ぶと云うことは、その他の 3 人を選んだ場合と全く同じグループ分けになってしまうので、この 20 通りのうち半数はグループ分けとしては重複しています。従って 6 人を 3 人ずつに分ける方法は 10 通りあります。

以上から全部で 280 通りあることが分かります。□

演習問題 5.2 [問題集 18.27] 学生 9 人を次の様に 3 人ずつ 3 つのグループに分けると、組み分けの方法は何通りありますか。

(1) A グループに 3 人、B グループに 3 人、C グループに 3 人。

(2) グループに名前をつけずに 3 人、3 人、3 人のグループに分ける。

(1) は同様に考えて

$${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2} = 1680 \text{ 通り}$$

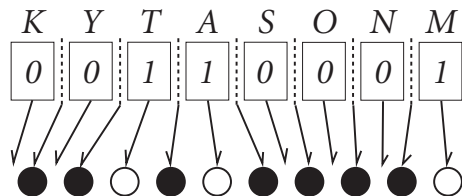
であり、(2) はグループの名前の付け方分  $3!$  で割って 280 通り。

## 5.2 定食問題あるいは分配問題

問題 5.2.1 定食屋『かさい』では定食を注文すると自動的にご飯とみそ汁が付き、唐揚げ、焼き魚、筑前煮、青菜炒め、刺身、おひたし、ニンジンシリシリ、麻婆豆腐の 8 種類あるおかずの中から 3 品を自由を選んで組み合わせることが出来ます。もちろん同じ種類のおかずを 3 皿取っても構いません。

さて、必ず 3 品選ぶとして何種類の定食のヴァリエーションがあるでしょうか。

簡単のためおかずを K、Y、T、A、S、O、N、M とし、このアルファベットのついた箱をそれぞれ用意し一列に並べておきます。問題は 3 つのボールをこの 8 つの箱に入れる入れ方の総数を求めることになります (1 つの箱に 3 つ入れても良い)。



そこで白ボール 3 個と箱と箱の区切り 7 つを表す黒ボール 7 個を用意し、これを自由に並べてみればこれが 8 つの箱に 3 つの (白) ボールを入れた状態を表しています。

従って求める総数は合計 10 個の (白と黒の) ボールの並びの中の白ボールの位置のヴァリエーションと云う事になり、それは  ${}_{10}C_3$  通りあります。従って答えは

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

通りです。

□

普通感覚から言うと『皿に料理を盛る』わけですが、ここでは逆に『料理に皿を配分する』と考えるのが肝です。

演習問題 5.3 K's ジェラートでは 10 種類のフレーバーのアイスクリームの中から自由に 3 つ選んでコーンに載せてくれます。載せる順番は区別しないとした時、何種類の組み合わせがあるでしょうか？ダブルチョコ&ストロベリーなど、同じフレーバーを複数個取っても構いません。

今度は別の考え方でやってみましょう。

10 種類のアイスクリームの箱が並んでいるとして、まずは一番左の箱の前に立ちます。ここからゲームスタートです。

目の前にある箱のアイスクリームを取る場合は取る数だけシートに○を書きます。そして次の箱に進む時に矢印→を書きます (アイスを取らない場合は矢印だけ書きます)。シートに書き込んだ段階で次のステップに進みます。また目の前に次のアイスの箱があるわけですが、同じ様にアイスを取る／取らないし、シートに書き込みます。ただし、アイスは 3 個しか取る事が出来ませんし、3 個必ず取るものとします。

これを繰り返して行きますが、3 つ目のアイスクリームを取った時点でまだ右端のアイスクリームの箱に到達していなければ右端まで移動し、移動した数だけ矢印を書きます。これでゲーム終了です。

3 つ目のアイスを取ったのが右端の最後の箱だった場合は何もせずにそれで終了です (矢印は書きません)。

そうすると必ず○は 3 つ書かれている筈ですし、右端まで移動したと云う事は矢印も必ず 9 個書かれている筈です。

このシートの記述 (○と→の順列) が違えば、それは違う組み合わせのアイスを取ったと云う事ですし、どんな取り方をしても必ずシートに記入され、○と→の順列となります。

従って求める組み合わせの総数は○ 3 つと→ 9 つを並べる順列の総数になり、それは合計 12 個の場所の中で○が書き込まれるべき場所を指定するのと同じ事ですから総数は

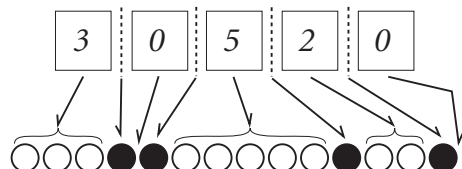
$${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

です。

□

演習問題 5.4 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってもよいとします。

5 個の箱に 10 個のボールが入っている様子を絵にすると次の様になっています：



そこでこれを 10 個のボールと 4 個の“箱の区切り線”が並んだものと解釈すれば、それらを混ぜ合わせた上でどんな風に並べたとしてもそれは 5 個の箱に 10 個のボールが分配されている様子を表しています。分かり易くするために下の様に白玉が『ボール』、黒玉が『区切り線』を表しているとして図式化すると良いでしょう。

黒玉、すなわち区切り線が隣接している場合は、その（2 本の区切り線が表す）箱にはボールが入っていないと解釈するわけですね。ボールと区切り線を混ぜたものの順列が違えばそれは違った分配方法を示していますから、結局求める総数は、10 個の同じもの（ボール）とそれとは別の 4 個の同じもの（区切り線）の合計 14 個を並べる順列の総数に等しい事が分かります。

14 これが決まってしまうえば残りの場所には自動的にボールが入りますから、結局求める総数は

$${}_{14}C_4 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001 \text{ 通り}$$

です。

□

演習問題 5.5 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってはならないとします。

【 ごく普通の解法 】 10 個のボールを並べると、“ボールとボールの間”と云うものは 9 個あります。この 9 個の“間”のうちのどこかに 4 つの仕切りを入れます。そうすると 10 個のボールが 5 つに分割され、どの分割も 1 個以上あります。これを区別のある箱に分割する事だと考えれば、結局求める総数は

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

です。

【 さっきの問題に引っ張られたまわりくどい解法 】 先の問題で求めた総数には 5 個の箱の中には何も入らないものも含んでいました。今回は全ての箱に少なくとも 1 つ入る様にしなければなりません。そこで、各箱に 1 個ずつ入れておきます。そうすると残りの 5 つは自由に入れて良い事になります。

つまり、5 個の区別のないボールを、5 個の区別のある箱に分配する方法の総数分だけの可能性があります。これはさっきと同様に考えればボール 5 個と区切り線 4 個の合計 9 個の場所から区切り線の入るべき 4 ヲ所を指定する方法の総数ですから

$${}_9C_4 = 126$$

通りの可能性があります。

□

演習問題 5.6 粒子には 16 種類の状態  $q_1, \dots, q_{16}$  があり、すべての粒子はそのいずれかの状態にあります。また粒子には FD 粒子と BE 粒子の 2 種類があって、FD 粒子が複数個集まった系では異なる FD 粒子は同じ状態にある事は出来ません。一方 BE 粒子系では複数の BE 粒子が同じ状態をとることが出来ます。

(1) 10 個の FD 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態  $q_1, \dots, q_{16}$  に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

(2) 20 個の BE 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態  $q_1, \dots, q_{16}$  に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

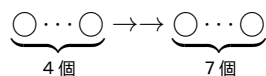
(1) これは 10 個の 1 と 6 個の 0 の順列の総数ですから、0 の入る場所の組み合わせ分だけヴァリエーションがあります。それは以下の通りです：

$${}_{16}C_6 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8008 \text{ 通り.}$$

(2) これは 16 個の箱に 20 個のボールを入れる入れ方の総数だけありますが、箱の区切り線は使わずにちょっと違った解釈でやってみましょう。

まず一番左の箱から始めて幾つか（0 個でも可）ボールを入れ、もうこれ以上入れないとき次の箱に移動します。そして最後の箱では（まだ残りのボールがあるなら）入れて終了とします（次の箱がありませんから移動しません）。このとき、ボールを入れるごとに丸を左から並べて書いて行き、移動する時は矢印を書くことにします。

例えば最初の箱に 4 個入れて次の箱に移動し、そこには何も入れず更に次の箱に移動し、そこで 7 個入れた段階で（まだ途中ですが）



と書かれている筈です。これを最後までやると、必ず丸は 20 個あり、矢印は 15 個ある筈です。逆に、丸 20 個と矢印 15 個をどう並べたとしてもそれは箱にボールを入れる行為と対応させることが出来ます。

従って求める総数は丸 20 個と矢印 15 個を並べる並べ方の総数だけあり、それは 35 個の場所の中から矢印が入るべき 15 の場所を選ぶ選び方の総数に一致し、

$${}_{35}C_{15} = \frac{35 \cdot 34 \cdots 21}{15 \cdot 14 \cdots 1} = \frac{35!}{20!15!} = 3247943160$$

です。

□

### 5.3 重複した順列の総数

箱へのボール分配の問題は、結局 2 つの重複したもの（ボール 10 個と箱の区切り 4 つ、など）を並べる順列の問題に置き換わっていました。ここではもっと種類を増やして考えてみましょう。

問題 5.3.1 [教科書例題 19.7] 7 個の文字 a,a,a,a,b,b,c 全部を 1 列に並べる並べ方は何通りありますか。

7 個の箱を 1 列に並べておいてそこに 1 つずつ入れて行くと言う風に考えましょう。すると、まず c の入る場所の選び方は 7 通りあります。そしてそのそれぞれの場合に対して、b の入る場所は残り 6 個の箱から 2 個選ぶ選び方ですから  ${}_6C_2$  通りあり、この時点で残りの 4 つの箱には全て a が入り決定しますから、求める総数は

$$7 \cdot {}_6C_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 105$$

です。

演習問題 5.7 [教科書問題 19.15] 7 個の数字 1,1,1,2,2,3,3 を全部使ってできる 7 桁の整数は何個ありますか。

これも矢張り 7 個の箱を用意してそこに数字を 1 つずつ入れて行くと考えます。

まず 3 の入る箱の選び方は  ${}_7C_2$  通りあり、そのそれぞれの場合に残りの 5 個の箱の中から 2 の入る箱を選ぶ方法は  ${}_5C_2$  通りあります。残り 3 つの箱には全て 1 が入り全て確定して 7 桁の整数になりますから求める個数は

$${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

です。