

5 グループ分けの総数

5.1 人数固定グループ分け

問題 5.1.1 [教科書例題 19.6] 学生 6 人を次のように分ける方法は何通りありますか。

- (1) 2 人ずつ A、B、C の 3 組に分ける。
- (2) 組を区別しないで、2 人ずつ 3 組に分ける。

(1) まず A 組の 2 人の選び方は ${}_6C_2$ 通りあり、そのそれぞれに対して B 組の 2 人の選び方は ${}_4C_2$ 通りあります。この時点で残り 2 人は自動的に C 組に配分されます。

従って選び方は以下の通り：

$${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 90 \text{ 通り.}$$

(2) [解答例その 1、(1) の結果を使う方法]

(1) で考えた組み分けのうち、学生の組み分けは同じで配分先の組の名前だけ違っているものは名前の付け方の可能性分だけありますが、3 つの組に 3 通りの名前を割り振る方法は $3!$ 通りありますから、求める総数は 90 を $3!$ で割ったもの、すなわち、15 通りになります。

[解答例その 2、直接法]

6 人のうち 1 人の学生に注目しておきます。彼を Z 君としましょう。まず Z 君と同じ組になる人を選ぶ方法は 5 通りあります。そしてそのそれぞれに対して残りの 4 人を 2 組に分ける方法分だけ選び方があります。

4 人の学生を 2 人ずつ 2 つのグループに分ける方法は何通りあるか考えましょう。矢張りこの場合もそのうちの 1 人に注目しておきます。彼を Y 君とします。Y 君と同じ組になる人の選び方は 3 通りあり、この人を選んだ時点で残りの 2 人がもう一方のグループに入りますから全て決定してしまいます。従って、4 人を 2 人ずつ 2 組に分ける方法は 3 通りです。

以上から、求める選び方の総数は $5 \times 3 = 15$ 通りです。 □

演習問題 5.1 [教科書問題 19.13] 学生 8 人を次のように 3 つのグループに分けると、組み分けの方法は何通りありますか。

- (1) A グループに 3 人、B グループに 3 人、C グループに 2 人。
- (2) グループに名前をつけずに 3 人、3 人、2 人のグループに分ける。

演習問題 5.2 [問題集 18.27] 学生 9 人を次の様に 3 人ずつ 3 つのグループに分けると、組み分けの方法は何通りありますか。

- (1) A グループに 3 人、B グループに 3 人、C グループに 3 人。
- (2) グループに名前をつけずに 3 人、3 人、3 人のグループに分ける。

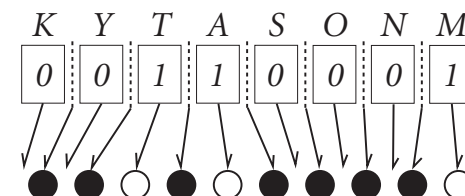
5.2 定食問題あるいは分配問題

問題 5.2.1 定食屋『かさい』では定食を注文すると自動的にご飯とみそ汁が付き、唐揚げ、焼き魚、筑前煮、青菜炒め、刺身、おひたし、ニンジンシリシリ、麻婆豆腐の 8 種類あるおかずの中から 3 品を自由に選んで組み合わせることが出来ます。もちろん同じ種類のおかずを 3 皿取っても構いません。

さて、必ず 3 品選ぶとして何種類の定食のヴァリエーションがあるでしょうか。

簡単のためおかずを K、Y、T、A、S、O、N、M とし、このアルファベットのついた箱をそれぞれ用意し一列に並べておきます。問題は 3 つのボールをこの 8 つの箱に入れる入れ方の総数を求めることになります (1 つの箱に 3 つ入れても良い)。

そこで白ボール 3 個と箱と箱の区切り 7 つを表す黒ボール 7 個を用意し、これを自由に並べてみればこれが 8 つの箱に 3 つの (白) ボールを入れた状態を表しています。



従って求める総数は合計 10 個の (白と黒の) ボールの並びの中の白ボールの位置の

ヴァリエーションと云う事になり、それは ${}_{10}C_3$ 通りあります。従って答えは

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

通りです。 $\square$

普通の感覚から言うと『皿に料理を盛る』わけですが、ここでは逆に『料理に皿を配分する』と考えるのが肝です。

演習問題 5.3 K's ジェラートでは 10 種類のフレーバーのアイスクリームの中から自由に 3 つ選んでコーンに載せてくれます。載せる順番は区別しないとした時、何種類の組み合わせがあるでしょうか？ダブルチョコ&ストロベリーなど、同じフレーバーを複数個取っても構いません。

演習問題 5.4 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってもよいとします。

演習問題 5.5 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってはならないとします。

演習問題 5.6 粒子には 16 種類の状態 $q_1, \dots, q_{16}$ があり、すべての粒子はそのいずれかの状態にあります。また粒子には FD 粒子と BE 粒子の 2 種類があって、FD 粒子が複数個集まった系では異なる FD 粒子は同じ状態にある事は出来ません。一方 BE 粒子系では複数の BE 粒子が同じ状態をとることが出来ます。

(1) 10 個の FD 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態 $q_1, \dots, q_{16}$ に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

(2) 20 個の BE 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態 $q_1, \dots, q_{16}$ に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

5.3 重複した順列の総数

箱へのボール分配の問題は、結局 2 つの重複したもの（ボール 10 個と箱の区切り 4 つ、など）を並べる順列の問題に置き換わっていました。ここではもっと種類を増やして考えてみましょう。

問題 5.3.1 [教科書例題 19.7] 7 個の文字 a,a,a,a,b,b,c 全部を 1 列に並べる並べ方は何通りありますか。

7 個の箱を 1 列に並べておいてそこに 1 つずつ入れて行くと云う風に考えましょう。すると、まず c の入る場所の選び方は 7 通りあります。そしてそのそれぞれの場合に対して、b の入る場所は残り 6 個の箱から 2 個選ぶ選び方ですから ${}_6C_2$ 通りあり、この時点で残りの 4 つの箱には全て a が入り決定しますから、求める総数は

$$7 \cdot {}_6C_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 105$$

です。

演習問題 5.7 [教科書問題 19.15] 7 個の数字 1,1,1,2,2,3,3 を全部使ってできる 7 桁の整数は何個ありますか。