5　いろいろな組み合わせ

5.1　人数固定グループ分け

問題 5.1.1 [教科書例題 19.6] 学生 6 人を次のように分ける方法は何通りありますか。

(1) 2 人ずつ A、B、C の 3 組に分ける。

(2) 組を区別しないで、2 人ずつ 3 組に分ける。

(1) まず A 組の 2 人の選び方は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあり、そのそれぞれに対して B 組の 2 人の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあります。この時点で残り 2 人は自動的に C 組に配分されます。

従って選び方は以下の通り：

$$ {}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 90 \text{ 通り}. $$

(2) [　解答例その 1、(1) の結果を使う方法　]

(1) で考えた組み分けのうち、学生の組み分けは同じで配分先の組の名前だけ違っているものは名前の付け方の可能性分だけありますが、3 つの組に 3 通りの名前を割り振る方法は $3!$ 通りありますから、求める総数は 90 を $3!$ で割ったもの、すなわち、15 通りになります。

演習問題 5.1 [教科書問題 19.13] 学生 8 人を次のように 3 つのグループに分けるとき、組み分けの方法は何通りありますか。

(1) A グループに 3 人、B グループに 3 人、C グループに 2 人。

(2) グループに名前をつけずに 3 人、3 人、2 人のグループに分ける。

演習問題 5.2 [問題集 18.27] 学生 9 人を次の様に 3 人ずつ 3 つのグループに分けるとき、組み分けの方法は何通りありますか。

(1) A グループに３人、B グループに３人、C グループに３人。

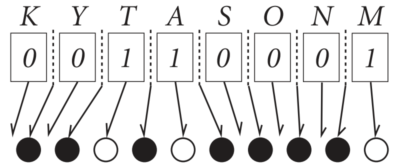
(2) グループに名前をつけずに３人、３人、３人のグループに分ける。

5.2　人数を固定しないグループ分け（重複組み合わせ）

問題 5.2.1 定食屋『かさい』では定食を注文すると自動的にご飯とみそ汁が付き、唐揚げ、焼き魚、筑前煮、青菜炒め、刺身、おひたし、ニンジンシリシリ、麻婆豆腐の８種類あるおかずの中から 3 品を自由に選んで組み合わせることが出来ます。もちろん同じ種類のおかずを 3 皿取っても構いません。

さて、必ず 3 品選ぶとして何種類の定食のヴァリエーションがあるでしょうか。

簡単のためおかずを K、Y、T、A、S、O、N、M とし、このアルファベットのついた箱をそれぞれ用意し一列に並べておきます。問題は３つのボールをこの 8 つの箱に入れる入れ方の総数を求めることになります（1 つの箱に 3 つ入れても良い）。



そこで白ボール 3 個と箱と箱の区切り 7 つを表す黒ボール 7 個を用意し、これを自由に並べてみればこれが 8 つの箱に 3 つの（白）ボールを入れた状態を表しています。

従って求める総数は合計 10 個の（白と黒の）ボールの並びの中の白ボールの位置のヴァリエーションと云う事になり、それは ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りあります。従って答えは

$$ {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 $$

通りです。 □

一般に、n 種類のものの中から重複を許して r 個選ぶ方法の総数は ${}_n\mathrm{H}_r$ で表され、

$$ {}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r $$

です。

演習問題 5.3 K's ジェラートでは 10 種類のフレーバーのアイスクリームの中から自由に 3 つ選んでコーンに載せてくれます。載せる順番は区別しないとした時、何種類の組み合わせがあるでしょうか？ダブルチョコ＆ストロベリーなど、同じフレーバーを複数個取っても構いません。

5.3　同じものを含む順列の総数、再び

問題 5.3.1 [教科書例題 19.7] 7 個の文字 a,a,a,a,b,b,c 全部を 1 列に並べる並べ方は何通りありますか。

【箱への分配と考える】7 個の箱を 1 列に並べておいてそこに 1 つずつ入れて行くと云う風に考えましょう。すると、まず c の入る場所の選び方は 7 通りあります。そしてそのそれぞれの場合に対して、b の入る場所は残り 6 個の箱から 2 個選ぶ選び方ですから ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りあり、この時点で残りの 4 つの箱には全て a が入り決定しますから、求める総数は

$$7 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 105$$

です。 □

演習問題 5.4 [教科書問題 19.15] 7 個の数字 1,1,1,2,2,3,3 を全部使ってできる 7 桁の整数は何個ありますか。

5.4　委員長公式

問題 5.4.1 $n \geq 1$ 人のクラスから $k \geq 1$ 人で構成される文化祭委員会を作り、一人の委員長を決める方法が何通りあるか考えることによって

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

を証明してください。

まず、k 人の委員を決める方法が ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りあり、その中から 1 人の委員長を決める方法は k 通りありますから、問題の場合の数は $k\,{}_n\mathrm{C}_k$ です。
一方、まず一人の委員長を決めて、その後、それ以外の $n-1$ 人の中から委員長以外の委員 $k-1$ 人を選ぶと考えれば、

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

となっているとも考えられます。

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{\{(n-1)-(k-1)\}!(k-1)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

□

委員長公式を使えば、こんな和が計算できます：

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_j = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

演習問題 5.5 『副委員長公式』

$$k(k-1)\,{}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} \quad (n \geq 2,\, n \geq k \geq 2)$$

を証明してください。

5.5　Exercise

演習問題 5.6 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってもよいとします。

演習問題 5.7 10 個の区別のないボールを 5 個の区別のある箱に分配する方法は何通りあるでしょうか。ただし 1 個も入らない箱があってはならないとします。

演習問題 5.8 [1996 東京大（一般）]* n を正の整数とし、n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考えます。ただし、1 個のボールも入らない箱があってもよいものとします。以下に述べる４つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めてください。

(1) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、A、B、C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(2) 互に区別のつかない n 個のボールを、A、B、C と区別された３つの箱に入れる場合。

(3) 1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを、区別のつかない３つの箱に入れる場合。

(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき、n 個の互に区別のつかないボールを、区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

演習問題 5.9 粒子には 16 種類の状態 $q_1, \ldots, q_{16}$ があり、すべての粒子はそのいずれかの状態にあります。また粒子には FD 粒子と BE 粒子の２種類があって、FD 粒子が複数個集まった系では異なる FD 粒子は同じ状態にある事は出来ません。一方 BE 粒子系では複数の BE 粒子が同じ状態をとることが出来ます。

(1) 10 個の FD 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態 $q_1, \ldots, q_{16}$ に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

(2) 20 個の BE 粒子からなる系があるとき（粒子に区別はありません）、各状態 $q_1, \ldots, q_{16}$ に属する粒子数の組み合わせは何通りありますか。

演習問題 5.10 (1) 自然科学、人文科学、社会科学の 3 種類の中から合計 10 コマ分の講義を選んで受講します。選び方は何通りありますか。

(2) 前問において、必ずしも 10 コマ選ばなくても良い（ただし、１コマ以上の講義は受講する）とすると、講義の選び方は何通りありますか。

演習問題 5.11 次の式を満たす非負整数 x, y, z の組は何通りありますか。

(1) $x+y+z=10$　(2) $x+y+z \leq 10$　(3) $1<x<y<z<10$

(4) $1 \leq x \leq y \leq z \leq 10$　(5) $1 \leq x \leq y \leq z^3 \leq 10$

演習問題 5.12 『副委員長公式』を使って

$$S = {}_n\mathrm{C}_1 + 2^2{}_n\mathrm{C}_2 + 3^2{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n^2{}_n\mathrm{C}_n$$

を計算してください。ただし、

$$R = {}_n\mathrm{C}_1 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 3{}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n{}_n\mathrm{C}_n = n2^{n-1}$$

は使って良いものとします

課題第１回

問題

以下の問いに対しての回答を、様々な媒体を参考にした上で、自分の言葉で文章化し、適宜図や数式を交えて書いてください。

課題 1.1 (1) 異なる 3 つの文字 A, B, C を 1 列に並べるとき、並べ方がなぜ全部で 6 通りあるのかを、具体的に全部書き出す方法だけでなく、計算によっても説明してください。

(2) 異なる n 個の文字 $C_1, \ldots, C_n$ を 1 列に並べるとき、並べ方がなぜ全部で $n!$ 通りあるのかを説明してください。

課題 1.2 (1) 異なる 5 個の文字 A, B, C, D, E の中から 2 つ選ぶとき、組み合わせがなぜ全部で 10 通りあるのかを、具体的に全部書き出す方法だけでなく、計算によっても説明してください。

(2) 異なる n 個の文字 $C_1, \ldots, C_n$ の中から異なる m 個を選ぶとき、組み合わせがなぜ全部で $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ 通りあるのかを説明してください。

課題 1.3 異なる 5 個の文字 A, B, C, D, E を円形に並べるとき、並べ方がなぜ全部で 24 通りあるのかを説明してください。

■出題：3E；11 月 4 日　　3A・3M；11 月 7 日

■形式：A4 または B5 の白紙・ルーズリーフなどに、学年・クラス・氏名明記のうえ記入してください。表紙は不要です。

ペーパーレスを実施されていて、紙を使いたくない場合は、通常提出期限には提出せずに、後記の『通常提出期限に提出できなかった場合の提出方法』に従って提出してください。

■通常提出期限：3E；11 月 11 日 講義開始時　　3A・3M；11 月 14 日 講義開始時

■最終提出期限：各組共通；11 月 17 日 17 時 00 分 00 秒

■通常提出期限に提出できなかった場合の提出方法

この期限は、『課題はやったのに、うっかり持ってくるのを忘れてしまった』とか、『当日寝坊をして講義開始時に間に合わなかった』などのケースを救済するために設けられています。採点時に優劣はありません。

通常提出期限を過ぎた場合は、紙媒体での提出は一切受け付けません。

次のいずれか：

◯紙に書いたものを撮影・スキャン等する。
◯最初から電子ノートに書く。
◯ LaTeX、Word 等で作成する。

によって pdf ファイル、もしくは一般的な形式の画像ファイルを作成し、Teams で担当講師宛のチャットに添付する形で上記時刻までに提出してください。担当講師名は『笠井剛』です。

ファイル名ではなく、画像ファイル内に必ず学科・番号・氏名を明記してください。複数のファイルを投稿する場合は各ファイル毎に明記してください。ファイルを統合する（複数ページ）場合はこの限りではありません。

最終提出期限を過ぎたものは疾病・怪我等の特段の事情がない限り一切受け取りません。通信回線の状況が変化する可能性も十分ありますから、余裕をもって提出した方が良いでしょう。

疾病・怪我等で課題に取り組めるような状況でない場合は笠井まで連絡してください。別途考慮します。