

6 教科書章末問題

演習問題 6.1 白玉 2 個、赤玉 3 個、青玉 4 個が入っている袋から、5 個の玉を取り出すとき、玉の色の組について何通りの場合がありますか。

白玉の個数を 100 の位、赤玉の個数を 10 の位、青玉の個数を 1 の位として 3 桁以下の数で表して小さい順に並べて行く事にします。

014	(1)	203	(8)
023	(2)	212	(9)
032	(3)	221	(10)
104	(4)	230	(11)
113	(5)		
122	(6)		
131	(7)		

従って 11 通りです。

□

演習問題 6.2 0,1,2,3,4 の 5 個の数字から異なる 4 個の数字を用いて出来る 4 桁の偶数は何個ありますか。

1 の位が 0 のものは、残りの 3 つの並べ方が ${}_4P_3 = 24$ 通りあります。

次に 1 の位が 2 のもので、千の位の選び方は 0、2 以外のどれかですから 3 通りあります。そのそれぞれに対して百、十の位の並べ方は ${}_3P_2 = 6$ 通りあって合計で 18 通りあります。

1 の位が 4 の場合は上と同様に 18 通りあります。

以上から、題意の個数は $24 + 18 + 18 = 60$ 個です。

□

演習問題 6.3 立方体の各面に異なる 6 色を塗るとき、何種類の配色がありますか。

6 種類の色を $C_1, \dots, C_6$ とします。どこかは必ず C_1 で塗られていますので、これが丁度上面に来る様に回転させて考えます。

【 C_1 の対面が C_2 である場合】 この場合は、残りの 4 面は配色に回転対称性がありますから $C_3, \dots, C_6$ の円順列で、 $3!$ 通りの配色があります。

【 C_1 の面と C_2 の面が接している場合】 この場合は残りの 4 面は自由に決められますから $4!$ 通りの配色があります。

以上から合計すると $3! + 4! = 6 + 24 = 30$ 通りの配色があることが分かります。 □

演習問題 6.4 正 8 角形の頂点のうち 3 つを結んで 3 角形をつくるとき、

- (1) 3 角形は全部で何個ありますか。
- (2) 正 8 角形と 2 辺を共有するものは何個ありますか。
- (3) 正 8 角形と 1 辺だけを共有するものは何個ありますか。
- (4) 正 8 角形と辺を共有しないものは何個ありますか。

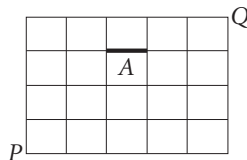
(1) 何の制限もなければ、頂点を 3 個（自由に）指定すればそれで 1 つの 3 角形が決定しますから、総数は ${}_8C_3 = 56$ 個です。

(2) これは 3 頂点が正 8 角形の連続する 3 個の頂点である場合ですから、その選び方は 8 通りあります。

(3) この場合 3 頂点の選び方は、正 8 角形の連続する 2 つの頂点と、その両隣以外の 4 頂点の中の 1 点を選べば良いわけですから、連続する 2 頂点の選び方が 8 通り、他の 1 点の選び方が 4 通りですから、合計 32 通りの選び方があります。

(4) 3 辺を共有する事は出来ませんから、(1) で求めた総数から (2) と (3) の個数を引けば辺を共有しない場合が求まります。従って $56 - 8 - 32 = 16$ 個です。 □

演習問題 6.5 右の図の様に、道路が碁盤の目の様になった街があります。地点 P から Q まで最短の道を行くとき、



(1) 道順は全部で何通りありますか。

(2) そのうち A を通らない道順は何通りありますか。

(1) 地点 P から Q へ行くには東へ 5 ブロック、北へ 4 ブロック行けば良く、最短と云う事は西や南へ戻る事はせずに東へ行く場合と北へ行く場合の組み合わせのみで進む事を意味します。

従って、全体で 9 行程あるうち北へ行くのがどの行程であったかを決定してやれば 1 つのルートが定まりますのでその総数は 9 個から 4 つをとる組み合わせの総数となり ${}_9C_4 = 126$ 通りです。

(2) A を通るものの総数は数え易いのでこれを数えて (1) で見た全体から引けば良い事になります。

まず P から A の西端へ行くまでの行程は (1) と同様に考えて ${}_5C_2$ 通りあり、そのそれぞれに対して A の東端から Q へ行く行程が ${}_3C_1$ あります。従って A を通る行程の総数は ${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ ありますから求める総数は $126 - 30 = 96$ 通りとなります。□

演習問題 6.6 同じ形の白旗 4 本、赤旗 3 本、青旗 2 本、合計 9 本の旗があります。これらを 1 列に並べる方法は何通りありますか。

まず青旗の場所の決め方は ${}_9C_2 = 36$ 通りあり、そのそれぞれに対して赤旗の決め方が ${}_7C_3 = 35$ 通りあります。この時点で残りの場所に残りの 4 本の白旗が入って確定します。従って求める総数は $36 \cdot 35 = 1260$ 通りです。□

演習問題 6.7 $(x^3 - \frac{1}{x^2})^n$ の展開式の中に定数項が含まれているような最小の自然数 n は幾つになりますか、またその時の定数項を求めて下さい。

2 項定理によれば展開式の一般項は

$${}_nC_m(x^3)^m\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{n-m}=(-1)^{n-m}{}_nC_mx^{5m-2n}$$

となり、 m が違えば x の次数が異なりキャンセルする事はありません。従って定数項があるためには $5m = 2n$ でなければならず、 n は 5 の倍数でなければなりません。そのうち最小の場合は $n = 5$ の場合で、このとき $m = 2$ に相当する項が定数項になります。

従って求める n の最小値は 5 で、その時の定数項は

$$(-1)^{5-2}{}_5C_2 = -10$$

です。□

演習問題 6.8 $(a+b+c)^7$ の展開式で a^4b^2c と abc^5 の係数を求めて下さい。

展開したときの各項は $d_1d_2\cdots d_7$ であって各 d_j は a, b, c のいずれかになります。このうち a^4b^2c になるものが幾つあるか見ると、まず c になる d_j の場所決めて 7 通り、そのそれぞれに対して b になる d_j の場所決めて ${}_6C_2 = 15$ 通りありますから、合計で $7 \cdot 15 = 105$ 通りあります。従って同じものが 105 個あるのでそれをまとめれば係数は 105 になります。

abc^5 になるものも同様に数えれば $7 \cdot 6$ 通りありますから係数は 42 です。□