

7 集合

7.1 集合

定義 7.1.1 [集合] ある条件を満たすものの全体の集まりを集合 (set) と言い、その集合を構成している 1 つ 1 つのものをその集合の要素または元 (element) と言います。

x が集合 X の要素であるとき x は X に属すると言って次のように表します：

$$x \in X.$$

7.1.1 基本的な数の集合

複素数全体の集まりを $\mathbb{C}$ 、実数全体の集まりを $\mathbb{R}$ 、有理数全体の集まりを $\mathbb{Q}$ 、整数全体の集まりを $\mathbb{Z}$ 、自然数全体の集まりを $\mathbb{N}$ で表します。

ただし、自然数には 0 を含める場合と含めない場合がありますので注意が必要です。混乱を避けるために『自然数』とは言わずに正の整数全体を $\mathbb{Z}^+$ で表すことがあります。

7.1.2 集合の表現方法

羅列	$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$	12 の約数全体
羅列 (無限の省略)	$\{2, 4, 6, \dots\}$	正の偶数全体
条件の提示	$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	正の偶数全体
条件の提示	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	正の実数全体

演習問題 7.1 次の集合を適当な表し方で示して下さい。

- (1) 1 から 10 までの偶数。 (2) 正の奇数の集合。
(3) 0 以上 1 以下の実数の集合。

【解答例】

- (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.
(2) $\{2n + 1 \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$.
(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

□

演習問題 7.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{ は正の奇数}\}$ とするとき、次のそれぞれの数は A に属するか、 B に属するか、どちらにも属さないか述べて下さい。

4, 9, 3, -1, 5.8

【解答例】

	4	9	3	-1	5.8
A	○	×	○	×	×
B	×	○	○	×	×

7.1.3 注意

『ある条件』を満たすものの全体を集合と呼びましたが、厳密にはこれは定義になっていません。

例えば集合 A を

$$A = \{x \mid x \notin x\}$$

と定めると、

$$A \in A \implies A \notin A$$

でありまた

$$A \notin A \implies A \in A$$

となってしまう、集合 A は自分自身を含むのか含まないのか確定しないことになります。これでは『条件を満たすものの全体』と云うものの自体が不明となり意味をなさなくなります。

この辺りをきちんと修正しようとするとなかなか難しい数学を勉強しなければならないのでここでは省略し、注意を喚起するにとどめます。

7.2 部分集合

定義 7.2.1 【部分集合】 集合 A の要素が全て集合 B の要素であるとき、 A は B に含まれる、あるいは A は B の部分集合 (subset) であると言って

$$A \subset B, \quad B \supset A, \quad (A \subseteq B, \quad B \supseteq A)$$

で表します。

$A \subset B$ でありかつ $B \subset A$ であるとき、2つの集合 A, B は全く同じ要素から構成されており、 A, B は同じ集合であると見なし A と B は等しいと言い、 $A = B$ と書きます。

問題 7.2.2 次の集合 $A, B, C, \mathbb{N}$ について、包含関係を記号で示して下さい。

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \\ C = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の約数} \}, \quad \mathbb{N} = \{x \mid x \text{ は 自然数} \}$$

【解答例】

$$A \subset B \subset C \subset \mathbb{N}.$$

□

演習問題 7.3 次の集合 A, B, C, D について、包含関係があれば示して下さい。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\}, \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

【解答例】

$$A \subset D, \quad B \subset D, \quad C \subset D.$$

□

7.3 和集合、共通部分、補集合

定義 7.3.1 【和集合】 2つの集合 A, B があったとき、少なくともどちらか一方に属している要素全体の集合を、 $A \cup B$ と書いて A と B の和集合 (union)、あるいは結びと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots, A_n$ や (可算) 無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots$ に対しても全く同様に和集合

$$\bigcup_{j=1}^n A_j, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

が定められます。

定義 7.3.2 【空集合】 要素が1つもない“集合”も特別な集合として考え、空集合 (empty set) と呼び記号 $\emptyset, \emptyset, \phi, \{\}$ で表します。空集合は任意の集合の部分集合であると考えます。

記号 $\emptyset$ はノルウェー語のアルファベットにある文字 $\empty$ が由来であり、ノルウェー語を知っていたフランスの数学者アンドレ・ヴェイユ (André Weil) が空集合を表す記号として 1939 年に提案しました。この文字はギリシア文字のファイ ϕ に良く似ているので空集合の記号としてファイを使うこともあります。

定義 7.3.3 【共通部分】 2つの集合 A, B があったとき、両方の集合に属している要素全体の集合を、空集合である場合も含めて $A \cap B$ と書いて A と B の共通部分 (intersection)、あるいは交わりと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots, A_n$ や (可算) 無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots$ に対しても全く同様に共通部分

$$\bigcap_{j=1}^n A_j, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

が定められます。

事実 7.3.4 [分配法則]

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

まず

$$A \cap B \subset A \cap (B \cup C), \quad A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$$

なので

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

です。また $x \in A \cap (B \cup C)$ なら、 $x \in A$ でありかつ $x \in B$ または $x \in C$ ですから、 $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$ となって $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が分かりますから

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \supset A \cap (B \cup C)$$

です。これらを合わせて

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

です。また、

$$A \subset A \cup B, \quad A \subset A \cup C$$

から

$$A \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

であり、

$$B \cap C \subset B \subset A \cup B, \quad B \cap C \subset C \subset A \cup C$$

から

$$B \cap C \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ですから

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

である一方、 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ であって $x \notin A$ であるならば $x \in B \cap C$ ですから、

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$$

が得られ、合わせて

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

が分かります。□

集合とその要素を扱う場合、要素として考えるものの範囲があらかじめ定まっていることが多いでしょう。

約数や倍数を考える時は正の整数を考えていますし、2次方程式の解であれば複素数全体の中で考えています。

定義 7.3.5 議論の対象となっているものの全体の集合 U とその部分集合 A に対して、 U の要素のうちで A に属さないものの全体のなす集合を、 U を全体集合としたときの A の補集合 (complement) と言って、記号 $\overline{A}$ あるいは A^c で表します。

U を全体集合とすると、 U の部分集合 A に対して

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \phi$$

です。

ただしこの記号自体は U が全体集合であることを反映していませんので、どう云う全体集合の中で考えているのか注意が必要です。

演習問題 7.4 [教科書 問題 6.4] $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の約数} \}$ のとき $A \cap B, A \cup B$ を求めて下さい。

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 3\},$$

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12\}.$$

□

演習問題 7.5 [教科書 問題 6.5] 全体集合を

$$U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ から } 10 \text{ までの自然数} \}$$

とすると、次の集合の補集合を求めて下さい。

$$A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の約数} \}.$$

$$\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}, \quad \overline{B} = \{3, 5, 6, 7, 9, 10\}.$$

□

事実 7.3.6 [de Morgan's law]

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

全体集合を U としたとき、 U は互いに共通部分のない和として 4 つの集合の和で書き表すことが出来ます：

$$\begin{aligned} U &= A \cup \overline{A} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}). \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= \{(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\} \cup \{(B \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)\} \\ &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\} \cup \{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\} \\ &= A \cup B \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

が分かります。

□

演習問題 7.6 [教科書問題 6.6] 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ を数直線上に図示し、 $A \cap B$, $A \cup B$ を示して下さい。

$$A \cap B = \{x \mid -2 < x \leq 3\}, \quad A \cup B = \{x \mid -3 \leq x < 5\}.$$

□

7.4 要素の個数

集合 A の要素の個数が有限であるとき、その個数は $\#(A)$, $|A|$ などの記号で表すのが普通ですが、この講義では教科書に従って $n(A)$ で表わすことにします。ただしこの記号は世界で標準として流通しているわけではないことは覚えておいて下さい。

事実 7.4.1

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

全体集合を U とするとき、

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(U)$$

が成り立っています。

$$U = \{1 \text{ から } 20 \text{ までの自然数} \}, \quad A = \{2 \text{ の倍数} \}, \quad B = \{3 \text{ の倍数} \}.$$

のとき、

$$A \cap B = \{6 \text{ の倍数} \}, \quad A \cup B = \{2 \text{ または } 3 \text{ の倍数} \}$$

なので、

$$n(A \cap B) = 3, \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 6 - 3 = 13$$

です。

演習問題 7.7 [教科書問題 6.7] 1 から 100 までの自然数の集合を U 、そのうち 5 の倍数の集合を A 、7 の倍数の集合を B とするとき、次の集合の要素の個数を求めて下さい。

$$n(A), \quad n(B), \quad n(A \cap B), \quad n(A \cup B), \quad n(\bar{A}), \quad n(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$n(A) = 20$$

$$n(B) = 14$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = 20 + 14 - 2 = 32$$

$$n(\bar{A}) = 80$$

$$n(\bar{A} \cap \bar{B}) = n(\overline{A \cup B}) = 68.$$

□

7.5 Exercise

演習問題 7.8 [教科書練習問題 6【1】] 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とし、 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $B = \{2, 4, 6, 8\}$ とするとき、次の集合を求めて下さい。

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \bar{A}, \quad A \cap \bar{B}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \cap \bar{B} = \{1, 3\}$$

□

演習問題 7.9 [教科書練習問題 6【2】] 集合 A, B について

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$A \cap B = \{2, 3, 6\}, \quad A \cap \bar{B} = \{1, 8\}$$

であるとき、 A, B を求めて下さい。

$A \cup B$ を全体集合として考えます。

$$A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = \{1, 2, 3, 6, 8\}$$

$$B = B \cap (A \cup \bar{A})$$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

$$= (B \cap A) \cup \{(B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{A})\}$$

$$= (B \cap A) \cup \{(A \cup B) \cap \bar{A}\}$$

$$= \{2, 3, 6\} \cup \{4, 5, 7\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

□

ですから、両方に入っている学生は7人です。

□

演習問題 7.10 [教科書練習問題 6【3】] 次の場合、集合 A と B の間にはどんな関係がありますか。

$$(1) A \cap B = A, \quad (2) A \cup B = A, \quad (3) A \cap B = A \cup B$$

$$(1) A \subset B$$

$x \in A$ ならば $x \in A \cap B \subset B$ から $x \in B$ です。

$$(2) B \subset A$$

$x \in B$ ならば $x \in A \cup B = A$ から $x \in A$ です。

$$(3) A = B$$

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset A, \quad B \subset A \cup B = A \cap B \subset B.$$

から、

$$A = A \cup B = B$$

です。

□

演習問題 7.11 [教科書練習問題 6【4】] 40 人のクラスで、運動部に入っている学生は 23 人、文化部に入っている学生は 16 人、運動部にも文化部にも入っていない学生は 8 人でした。このクラスで運動部と文化部の両方に入っている学生は何人ですか。

40 人の全体集合 U の中で運動部に入っている学生の集合を A 、文化部に入っている学生の集合を B とすると、

$$n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 40 - 8 = 32$$

であり、

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$32 = 23 + 16 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 7$$