

7 集合

7.1 集合

定義 7.1.1 [集合] ある条件を満たすものの全体の集まりを集合 (set) と言い、その集合を構成している 1 つ 1 つのものをその集合の要素または元 (element) と言います。 x が集合 X の要素であるとき x は X に属すると言って $x \in X$ で表します。

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad \{2, 4, 6, \dots\}, \quad \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

演習問題 7.1 次の集合を適当な表し方で示して下さい。

(1) 1 から 10 までの偶数 (2) 正の奇数の集合 (3) 0 以上 1 以下の実数の集合

演習問題 7.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{ は正の奇数}\}$ とするとき、次のそれぞれの数は A に属するか、 B に属するか、どちらにも属さないか述べて下さい。

$$4, \quad 9, \quad 3, \quad -1, \quad 5.8$$

7.2 部分集合

定義 7.2.1 [部分集合] 集合 A の要素が全て集合 B の要素であるとき、 A は B に含まれる、あるいは A は B の部分集合 (subset) であると言って次で表します：

$$A \subset B, \quad B \supset A, \quad (\quad A \subseteq B, \quad B \supseteq A \quad)$$

問題 7.2.2 次の集合 $A, B, C, \mathbb{N}$ について、包含関係を記号で示して下さい。

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6\}, C = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の約数}\}, \mathbb{N} = \{x \mid x \text{ は自然数}\}$$

【解答例】 $A \subset B \subset C \subset \mathbb{N}$.

□

演習問題 7.3 次の集合 A, B, C, D について、包含関係があれば示して下さい。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0\}, \\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

7.3 和集合、共通部分、補集合

定義 7.3.1 [和集合] 2 つの集合 A, B があったとき、少なくともどちらか一方に属している要素全体の集合を、 $A \cup B$ と書いて A と B の和集合 (union)、あるいは結びと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots, A_n$ や (可算) 無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots$ に対しても全く同様に和集合が定められます：

$$\bigcup_{j=1}^n A_j, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

定義 7.3.2 [空集合] 要素が 1 つもない“集合”も特別な集合として考え、空集合 (empty set) と呼び記号 $\emptyset, \emptyset, \phi, \{\}$ で表します。空集合は任意の集合の部分集合であると考えます。

定義 7.3.3 [共通部分] 2 つの集合 A, B があったとき、両方の集合に属している要素全体の集合を、空集合である場合も含めて $A \cap B$ と書いて A と B の共通部分 (intersection)、あるいは交わりと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots, A_n$ や (可算) 無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots$ に対しても全く同様に共通部分が定められます：

$$\bigcap_{j=1}^n A_j, \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

事実 7.3.4 [分配法則]

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

定義 7.3.5 議論の対象となっているものの全体の集合 U とその部分集合 A に対して、 U の要素のうちで A に属さないものの全体のなす集合を、 U を全体集合としたときの A の補集合 (complement) と言って、記号 $\bar{A}$ あるいは A^c で表します。

演習問題 7.4 [教問題 6.4] $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の約数} \}$ のとき $A \cap B, A \cup B$ を求めて下さい。

演習問題 7.5 [教問題 6.5] 全体集合を $U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ から } 10 \text{ までの自然数} \}$ とするとき、次の集合の補集合を求めて下さい。

$$A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の約数} \}.$$

事実 7.3.6 [de Morgan's law] $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$

演習問題 7.6 [教問題 6.6] 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ を数直線上に図示し、 $A \cap B, A \cup B$ を示して下さい。

7.4 要素の個数

集合 A の要素の個数 : $n(A)$.

事実 7.4.1 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$

$$U = \{1 \text{ から } 20 \text{ までの自然数} \}, \quad A = \{2 \text{ の倍数} \}, \quad B = \{3 \text{ の倍数} \}.$$

$$A \cap B = \{6 \text{ の倍数} \}, \quad A \cup B = \{2 \text{ または } 3 \text{ の倍数} \}$$

$$n(A \cap B) = 3, \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 6 - 3 = 13$$

演習問題 7.7 [教問題 6.7] 1 から 100 までの自然数の集合を U 、そのうち 5 の倍数、7 の倍数の集合を A, B とするとき、次の集合の要素の個数を求めて下さい。

$$n(A), \quad n(B), \quad n(A \cap B), \quad n(A \cup B), \quad n(\bar{A}), \quad n(\bar{A} \cap \bar{B})$$

7.5 Exercise

演習問題 7.8 [教練 6 【1】] 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とし、 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ とするとき、次の集合を求めて下さい。

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \bar{A}, \quad A \cap \bar{B}$$

演習問題 7.9 [教練 6 【2】] 集合 A, B について

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad A \cap B = \{2, 3, 6\}, \quad A \cap \bar{B} = \{1, 8\}$$

であるとき、 A, B を求めて下さい。

演習問題 7.10 [教練 6 【3】] 次の場合、集合 A と B の間にはどんな関係がありますか。

$$(1) A \cap B = A, \quad (2) A \cup B = A, \quad (3) A \cap B = A \cup B$$

演習問題 7.11 [教練 6 【4】] 40 人のクラスで、運動部に入っている学生は 23 人、文化部に入っている学生は 16 人、運動部にも文化部にも入っていない学生は 8 人でした。このクラスで運動部と文化部の両方に入っている学生は何人ですか。