7　集合

7.1　集合

定義 7.1.1 [集合] ある条件を満たすものの全体の集まりを集合（set）と言い、その集合を構成している１つ１つのものをその集合の要素または元（element）と言います。

x が集合 X の要素であるとき x は X に属すると言って次のように表します：

$$x \in X.$$

7.1.1　基本的な数の集合

複素数全体の集まりを $\mathbb{C}$、実数全体の集まりを $\mathbb{R}$、有理数全体の集まりを $\mathbb{Q}$、整数全体の集まりを $\mathbb{Z}$、自然数全体の集まりを $\mathbb{N}$ で表します。

7.1.2　集合の表現方法

羅列	$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$	12 の約数全体
羅列（無限の省略）	$\{2, 4, 6, \dots\}$	正の偶数全体
条件の提示	$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	正の偶数全体
基本的な帰属と条件の提示	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	正の実数全体

演習問題 7.1 次の集合を適当な表し方で示して下さい。
(1) 1 から 10 までの偶数。　(2) 正の奇数の集合。
(3) 0 以上 1 以下の実数の集合。

演習問題 7.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x$ は正の奇数 $\}$ とするとき、次のそれぞれの数は A に属すか、B に属すか、どちらにも属さないか述べて下さい。

$$4, \quad 9, \quad 3, \quad -1, \quad 5.8$$

7.2　部分集合

定義 7.2.1 [部分集合] 集合 A の要素が全て集合 B の要素であるとき、A は B に含まれる、あるいは A は B の部分集合（subset）であると言って

$$A \subset B, \quad B \supset A, \qquad (\quad A \subseteq B, \quad B \supseteq A \quad)$$

で表します。また、集合 X の全ての部分集合からなる集合を X の冪集合（power set）と言って、$\mathfrak{P}(X)$、あるいは 2^X で表します。

問題 7.2.2 次の集合 $A, B, C, \mathbb{N}$ について、包含関係を記号で示して下さい。

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6\},$$
$$C = \{x \mid x \text{ は 12 の約数 }\}, \quad \mathbb{N} = \{x \mid x \text{ は自然数 }\}$$

演習問題 7.3 次の集合 A, B, C, D について、包含関係があれば示して下さい。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \geq 0\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}.$$

7.3　和集合、共通部分、補集合

定義 7.3.1 [和集合] ２つの集合 A, B があったとき、少なくともどちらか一方には属している要素全体の集合を、$A \cup B$ と書いて A と B の和集合（union）、あるいは結びと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots, A_n$ や（可算）無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \dots$ に対しても全く同様に和集合

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

が定められます。

定義 7.3.2 [空集合] 要素が１つもない“集合”も特別な集合として考え、空集合（empty set）と呼び記号$\varnothing, \emptyset, \phi, \{\}$ で表します。空集合は任意の集合の部分集合であると考えます。

定義 7.3.3 [共通部分] ２つの集合 A, B があったとき、両方の集合に属している要素全体の集合を、空集合である場合も含めて $A \cap B$ と書いて A と B の共通部分 (intersection)、あるいは交わりと言います。

有限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \ldots, A_n$ や（可算）無限個の集合のファミリー $A_1, A_2, \ldots$ に対しても全く同様に共通部分

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

が定められます。

演習問題 7.4 次の分配法則を証明してください：

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,　(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

演習問題 7.5 次の分配法則を証明してください：

(1) $A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap B_k)$,　(2) $A \cup \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}(A \cup B_k)$.

定義 7.3.4 議論の対象となっているものの全体の集合 U とその部分集合 A に対して、U の要素のうちで A に属さないもの全体のなす集合を、U を全体集合としたときの A の補集合（complement）と言って、記号 $\overline{A}$ あるいは A^c で表します。

演習問題 7.6 [教科書　問題 6.4] $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \mid x$ は 12 の約数 $\}$ のとき $A \cap B, A \cup B$ を求めて下さい。

演習問題 7.7 [教科書　問題 6.5] 全体集合を

$$U = \{x \mid x \text{ は 1 から 10 までの自然数 }\}$$

とするとき、次の集合の補集合を求めて下さい。

$$A = \{3, 6, 9\}, \quad B = \{x \mid x \text{ は 8 の約数 }\}.$$

事実 7.3.5 [de Morgan’s law] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

演習問題 7.8 [教科書問題 6.6] 集合 $A = \{x \mid -2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ を数直線上に図示し、$A \cap B$, $A \cup B$ を示して下さい。

7.4　要素の個数

事実 7.4.1 集合 A の要素の個数が有限であるとき、その個数を $n(A)$ で表わします。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

演習問題 7.9 [教科書問題 6.7] 1 から 100 までの自然数の集合を U、そのうち 5 の倍数の集合を A、7 の倍数の集合を B とするとき、次の集合の要素の個数を求めて下さい。

$$n(A), \quad n(B), \quad n(A \cap B), \quad n(A \cup B), \quad n\left(\bar{A}\right), \quad n\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right)$$

7.5 Exercise

演習問題 7.10 [教科書練習問題 6【1】] 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とし、$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ とするとき、次の集合を求めて下さい。

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad \overline{A}, \quad A \cap \overline{B}$$

演習問題 7.11 [教科書練習問題 6【2】] 集合 A, B について

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$A \cap B = \{2, 3, 6\}, \quad A \cap \overline{B} = \{1, 8\}$$

であるとき、A, B を求めて下さい。

演習問題 7.12 [教科書練習問題 6【3】] 次の場合、集合 A と B の間にはどんな関係がありますか。

(1) $A \cap B = A$,　(2) $A \cup B = A$,　(3) $A \cap B = A \cup B$

演習問題 7.13 [教科書練習問題 6【4】] 40 人のクラスで、運動部に入っている学生は 23 人、文化部に入っている学生は 16 人、運動部にも文化部にも入っていない学生は 8 人でした。このクラスで運動部と文化部の両方に入っている学生は何人ですか。

演習問題 7.14 (1) $A = \{1, 2, 3\}$ のときに A の冪集合 $\mathfrak{P}(A)$ を求めてください。

(2) $B = \{1, 2, 3, 4\}$ のときに A の冪集合 $\mathfrak{P}(B)$ を求めてください。

(3) k は正の整数とします。$n(C) = k$ のときに $\mathfrak{P}(C)$ の要素の個数を求めてください。

演習問題 7.15* X から Y への写像 f と、X の部分集合 A に対して、

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid f(x) = y, x \in A \text{ を満たす } x \in X \text{ が存在する }\}$$

を f による A の像（image)、Y の部分集合 B に対して

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を f による B の逆像（inverse image）と言います。以下の問いに答えてください。

(1) $f(A) \cup f(B)$ と $f(A \cup B)$ の関係について述べてください。
(2) $f(A) \cap f(B)$ と $f(A \cap B)$ の関係について述べてください。
(3) $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ と $f^{-1}(C \cup D)$ の関係について述べてください。
(4) $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ と $f^{-1}(C \cap D)$ の関係について述べてください。