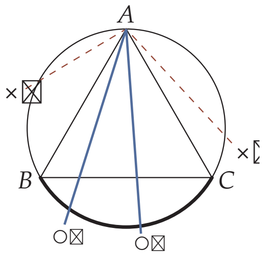
8 簡単な事象の確率

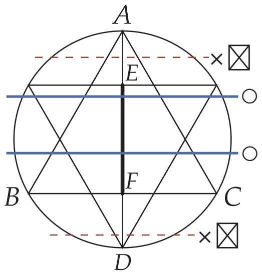
8.1 Bertrand の逆説

問題 **8.1.1** 円に 1 つの弦をランダムに引くとき、その弦が内接正 3 角形の 1 辺より長い確率は幾らでしょうか。

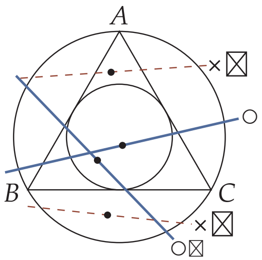
【解答その 1】 回転対称性があるので弦の始点を図の点 A に固定して終点 P をランダムに考えれば、点 P が弧 BC 内にあるとき弦の長さが内接正 3 角形の 1 辺を越えます。従って長さの比から確率は $\frac{1}{3}$ です。



【解答その 2】 回転対称性があるので水平な弦だけで考えれば、点 P が図の線分 EF 内にあるとき弦の長さが内接正 3 角形の 1 辺を越えます。従って線分 AD との長さの比から確率は $\frac{1}{2}$ です。



【解答その 3】 内接正 3 角形の内接円を考えると半径は $\frac{1}{2}$ になります。弦の中点がこの円内にあれば弦の長さが内接正 3 角形の 1 辺を越えます。従って面積の比から確率は $\frac{1}{4}$ です。



どうでしょうか？ もっともらしい解答が 3 つありますがどれが正しいのでしょうか。いや、それともどれも正しくない？

これは Bertrand の Paradox (1889) と呼ばれている有名な問題ですが、実は 3 つの解答の“全てが正解”と言わざるを得ません。いや、正確に言うなら、『(問題が不十分なので）答えられない』でしょうか。

なぜそんな事になるのかと言うと、弦をランダムに引くと言うときのその『ランダムさ』について標準的な解釈がなく、どう考えるのが自然なのかが不明なのです（本来はそれを問題文で指定すべきなのですがそれがありません)。従って答え様がないか、あるいは解答者ごとに違った『ランダムさ』の解釈に基づいて解答する事になり、結果的にこの様に違った『もっともらしい』解答が出て来てしまいます。

8.2 何を求めるのか

このように、一口に『確率』と言ってもその根本的なところははっきりしません。

これからやろうとしている事は、そう云う根本的なところで『そもそも確率とは何か』を問おうとしているわけではなく、次のようなことです：

元になる基本的な事柄の起こる確率が分かっている時に、それら基本的事柄を組み合わせたより複雑な事柄の起きる確率を計算する事

例えばここにサイコロがあったとしましょう。正確に言えばどんなサイコロもきっちり立方体にはなっていませんし、内部の密度にも偏りがあるはずです。ですから、ある現実のサイコロを振って 3 が出る確率は厳密には $\frac{1}{6}$ ではないはずです。
ここで 1 つの態度としてそのサイコロの形状や密度分布を細かく調査して 3 が出る確率を計算により導き出そうとするのもアリでしょうが、ここでやろうとしているのはそう云う事ではありません。ここでは、1 から 6 の目が出る確率は全て分かっているものとして（それぞれ $\frac{1}{6}$ であるとする)、『ではその場合に奇数が出る確率は幾らでしょうか？』と云う風なより複雑な事柄の確率を求める事を問題にします。

サイコロを振ると云う行為における基本的な事柄は『出目』に他なりません。そこで『出目が 1 である』・・・『出目が 6 である』と云う 6 つの基本的な事柄の事を『根元事象』と言います。更に、どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ であることを指して、それら 6 つの根元事象は全て『同様に確からしい』などとも言います。
ここら辺の言い回しは微妙な点もあるのでこの講義ではあまり使いません。この講義ではもっとはっきりと『各目の出る確率が全て $\frac{1}{6}$ である様なサイコロがある』と言う事にします。まあ、単にサイコロと言ったらそれを意味すると約束すれば良いわけです。
そうしてその基本的な事柄の確率を組み合わせてより複雑な事柄の確率を計算する方法を学んで行こうと思います。

8.3 基本的な考え方 -サイコロと袋中の玉-

『サイコロを振る』とか、『袋の中から玉を取り出す』など、何らかの行為（試行と言います）の結果には幾つかのヴァリエーションがあるものです。

例えばサイコロを振る場合、出る目には 1 から 6 の 6 種類のヴァリエーションがありますが、サイコロの場合はどの目も出る確率は同じ $\frac{1}{6}$ ですね（同様に確からしい）。
従って、サイコロを振って奇数が出る場合は、同じ確率で出る 6 種類の結果のうち 1、3、5 の 3 種類が該当しますから、その確率は

$$\frac{\text{（該当するヴァリエーションの総数）}}{\text{（全てのヴァリエーションの総数）}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

となります。

しかし袋の中に色だけ違う同じ形の玉（つまり、手探りでは判別出来ないと云う事です）が幾つか入っている状況で袋の中から 1 個を取り出す事を考えるとサイコロの場合とは少し事情が違う事が分かります。

例えば袋の中味が赤玉が 3 個、白玉 2 個、青玉 1 個だった時に、袋の中から 1 個取り出したときの『結果』は赤・白・青の 3 種類しかありません。そう云う意味では結果のヴァリエーションは 3 種類なのですが明らかにこの 3 種類の『結果』は出る確率が異なります。つまり教科書の言い方で言えばこの 3 種類の事象は同様に確からしくはありません。この場合、出た玉が白玉である確率を

$$\frac{\text{（該当するヴァリエーションの総数）}}{\text{（全てのヴァリエーションの総数）}} = \frac{1}{3}$$

とするのは間違いです。

色が塗ってある以前にそれは玉な訳です。同じ色が塗ってあったとしても 2 つの白玉は互いに異なる玉であって、手探りで探す場合にはそれらは区別されるはずです（どっちにしようか迷う事さえ出来ます！）。
従ってこのような場合に根元事象として考えるべき事は『どの色の玉が出るか』ではなくて『どの玉が出るか』なのです。

そこで、仮に玉全てに名前をつけて $R_1, R_2, R_3, W_1, W_2, B_1$ としましょう。そう考えれば取り出した結果のヴァリエーションは 6 種類あることが分かります（色を見る以前に球を見る）し、この 6 種類の結果は全て同じ確率で起きるであろう事が分かります。それぞれの結果は『同様に確からしい』のです。

そうすると出た玉が白玉である場合を考えると、該当する結果のヴァリエーションは W_1, W_2 の 2 種類であり、全ての結果のヴァリエーションは 6 種類ですから、取り出した玉が白玉である確率は、

$$\frac{\text{（該当するヴァリエーションの総数）}}{\text{（全てのヴァリエーションの総数）}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

となるでしょう。

定理 8.3.1 ある試行において全ての結果のヴァリエーションが N 通りあり、そのどれもが同じ確率 $\frac{1}{N}$ で起こると仮定します。
この状況下で、試行の結果に関するある事象 E の確率 $P(E)$ は、E に該当する結果のヴァリエーションの総数を m とすれば

$$P(E) = \frac{m}{N}$$

となります。

演習問題 8.1 トランプ 52 枚をよく切って 1 枚を抜くとき、ハートが出る事象を A、絵札が出る事象を B とします。$P(A), P(B)$ を求めて下さい。

トランプ 52 枚のうちハートは 13 枚ありますから、

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

であり、また、各スートに絵札は J, Q, K の 3 枚ずつあり、合計で 12 枚ありますから、

$$P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

です。 □

演習問題 8.2 袋の中に赤玉 4 個、白玉 3 個、合わせて 7 個の玉が入っています。どの玉が取り出される事も同様に確からしいものとして、この袋の中から玉を 1 つ取り出すとき、それが白玉である確率を求めて下さい。

玉を全て区別して考えれば出る玉のヴァリエーションは 7 通りあり、そのうち白玉は 3 個ですから求める確率は $\frac{3}{7}$ です。 □

8.4　複数個を同時に振った／取り出したときの結果について

問題 8.4.1 [教科書　例題 **12.1(1)]** 2 枚の硬貨を投げるとき、2 枚とも表である確率を求めて下さい。

2 枚を投げたときの表／裏と云う『表面上の結果』だけに注目してしまうと計算を誤ってしまいます。確かに結果は『表・表』、『表・裏』、『裏・裏』の 3 種類しかありませんから

$$P(\text{表・表}) = \frac{(\text{該当するヴァリエーションの総数})}{(\text{全てのヴァリエーションの総数})} = \frac{1}{3}$$

としてしまいがちですね。

しかし 2 枚の硬貨はそれぞれ“別の硬貨”ですから、もっと細かく見れば『表・裏』が出たと言っても 2 枚のうちどちらが裏でどちらが表なのか 2 通りのヴァリエーションがあります。

分かり易く 2 枚の硬貨に名前をつければ全ての結果は表のようになります：

硬貨 C_1	表	表	裏	裏
硬貨 C_2	表	裏	表	裏

従って求める確率は $\frac{1}{4}$ です。 □

演習問題 8.3 [教科書　例題 **12.1(2)(3)]** 次の枚数の硬貨を同時に投げて、表が 2 枚出る確率を求めて下さい。

(2) 3 枚　　(3) 5 枚

(2) 表を 0、裏を 1 で表すことにし、3 枚の硬貨 C_1, C_2, C_3 それぞれの結果をこの順に並べたものは $0, 1$ の順列になります。

全ての結果は 2^3 通りあり、その 1 つ 1 つが全て $\frac{1}{2^3}$ の確率で生じます（同様に確からしい)。

このうち 0 を丁度 2 つ含む順列は 1 の場所の分だけのヴァリエーションがあり全部で 3 つですから、求める確率は

$$\frac{3}{8}$$

です。

(3) 表を 0、裏を 1 で表すことにし、5 枚の硬貨 $C_1, \ldots, C_5$ それぞれの結果をこの順に並べたものは $0, 1$ の順列になります。

全ての結果は 2^5 通りあり、その 1 つ 1 つが全て $\frac{1}{2^5}$ の確率で生じます（同様に確からしい)。

このうち 0 を丁度 2 つ含む順列は ${}_5\mathrm{C}_2$ のヴァリエーションがありますから、求める確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

です。 □

問題 8.4.2 7 本のくじの中に当たりくじが 4 本あります。このくじを 3 本引くとき、2 本だけ当たる確率を求めて下さい。

当たり／ハズレを考える以前にくじは 7 本ありますのでどのくじが出て来るのか結果のヴァリエーションは ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり、また、当たりが丁度 2 本である様な結果のヴァリエーションは ${}_4\mathrm{C}_2 \cdot 3$ 通りですから求める確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 \cdot 3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{4\cdot3}{2\cdot1} \cdot 3}{\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{18}{35}$$

となります。 □

演習問題 8.4 [教科書　問題 **12.3]** 袋の中に白玉 6 個、赤玉 4 個が入っています。次の確率を求めて下さい。

(1) 同時に 3 個取り出すとき、3 個とも白玉である確率。

(2) 同時に 5 個取り出すとき、3 個が白玉、2 個が赤玉である確率。

(3) 同時に 5 個取り出すとき、白玉が 3 個以上含まれている確率。

(1) 全ての玉を区別して結果のヴァリエーションの総数を数えると、${}_{10}\mathrm{C}_3$ です。そのうちで 3 個とも白玉であるものは ${}_6\mathrm{C}_3$ 個ありますから問題の確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{6}$$

です。

(2) 同様に全ての玉を区別して結果の総数を数えると ${}_{10}\mathrm{C}_5$ です。そのうちで題意のものは ${}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_4\mathrm{C}_2$ 個ありますから、問題の確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{10}{21}$$

です。

(3) 結果の総数は上と同じであり、そのうち白玉が 4 個のものは ${}_6\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_1$ 個あり、白玉が 5 個のものは ${}_6\mathrm{C}_5$ あります。従って求める確率は (2) の結果とこれら 2 つの結果を足し合わせて

$$\frac{10}{21} + \frac{{}_6\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{10}{21} + \frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot4+6}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{31}{42}$$

となります。 □

> **演習問題 8.5 [教科書　問題 12.4]** 20 個の製品の中に 2 個の不良品が混ざっています。この中から 5 個を取り出すとき、その中に不良品が入っていない確率を求めて下さい。

20 個の製品の中から 5 個を取り出す結果の総数は ${}_{20}\mathrm{C}_5$ あり、そのうち全てが不良品でないものは ${}_{18}\mathrm{C}_5$ ありますから、題意の確率は

$$\frac{{}_{18}\mathrm{C}_5}{{}_{20}\mathrm{C}_5} = \frac{\frac{18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{21}{38}$$

となります。 □

8.5 Exercise

> **演習問題 8.6** 2 人がじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めて下さい。

これも 2 人を区別して考えなければなりません。

A さん	グー	グー	グー	チョキ	チョキ	チョキ	パー	パー	パー
B さん	グー	チョキ	パー	グー	チョキ	パー	グー	チョキ	パー

そう考えればじゃんけんの結果はそれぞれ 3 通りで合計 9 通りあり、そのうちあいこは 3 通りですから求める確率は $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ です。 □

> **演習問題 8.7** 2 個のさいころを同時に振って、出る目の和が 5 となる確率を求めて下さい。

出る目の結果のヴァリエーションの総数は $6 \times 6 = 36$ 通りあり、そのうち和が 5 になるヴァリエーションは

$$1+4, \quad 2+3, \quad 3+2, \quad 4+1$$

の 4 通りですから求める確率は

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

です。 □

> **演習問題 8.8** 1、2、3、4、5 の数字が書かれているカードが入っている箱があります。この箱から順に 3 枚のカードを取り出し左から並べて 3 けたの整数を作るとき、500 以上の偶数が出来る確率を求めて下さい。

取り出して並べた結果のヴァリエーションは全部で ${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3$ 通りあります。

そのうち 500 以上の偶数になっているものは何通りあるか数えてみましょう。まず最初に引くカードはこれは 5 でなければなりません。他だと 500 以上の数にならないからです。

また、3 枚目は偶数でなければなりませんから 2 か 4 の 2 通りあります。そしてそのそれぞれの場合について 2 枚目のカードは 5 の書かれたカードと 3 枚目のカード以外の 3 枚の中から自由に選べますからここには 3 通りのヴァリエーションがあります。

従って 500 以上の偶数になる場合は $1 \times 2 \times 3$ 通りあります。

従って求める確率は

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{10}$$

です。 □

演習問題 8.9 3 つのさいころを振るとき、出る目がすべて異なる確率を求めて下さい。

3 つのさいころの出目のヴァリエーションは、3 つのさいころを区別して数えて 6^3 通りあります。そのうち出目が全て異なるものは何通りあるかですが、まず最初のさいころの出目には 6 通りのヴァリエーションがあり、そのそれぞれの場合に対して 2 番目のさいころの目は最初のさいころで出た数以外の 5 通りのヴァリエーションがあります。更にそのそれぞれの場合に対して 3 番目のさいころでは 1、2 番目のさいころで出た数以外の 4 通りのヴァリエーションがありますから、結局全部で

$$6 \times 5 \times 4$$

通りのヴァリエーションがあることが分かります。

従って求める確率は

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

です。 □