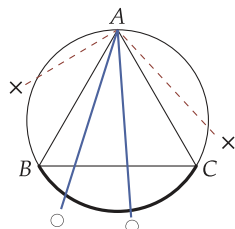


8 簡単な事象の確率

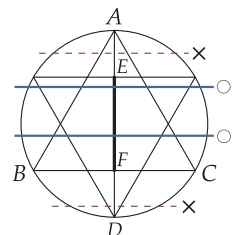
8.1 Bertrand の逆説

問題 8.1.1 円に1つの弦をランダムに引くとき、その弦が内接正3角形の1辺より長い確率は幾らでしょうか。

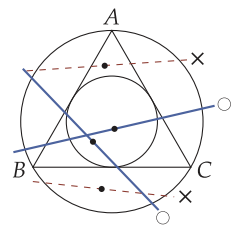
【解答その1】 回転対称性があるので弦の始点を図の点 A に固定して終点 P をランダムに考えれば、点 P が弧 BC 内にあるとき弦の長さが内接正3角形の1辺を越えます。従って長さの比から確率は $\frac{1}{3}$ です。



【解答その2】 回転対称性があるので水平な弦だけで考えれば、点 P が図の線分 EF 内にあるとき弦の長さが内接正3角形の1辺を越えます。従って線分 AD との長さの比から確率は $\frac{1}{2}$ です。



【解答その3】 内接正3角形の内接円を考えると半径は $\frac{1}{2}$ になります。弦の中点がこの円内であれば弦の長さが内接正3角形の1辺を越えます。従って面積の比から確率は $\frac{1}{4}$ です。



8.2 何を求めるのか

元になる基本的な事柄の起こる確率が分かっている時に、それら基本的事柄を組み合わせたより複雑な事柄の起こる確率を計算する事

サイコロを振ると言う行為における基本的な事柄は『出目』に他なりません。そこで『出目が1である』・・・『出目が6である』と言う6つの基本的な事柄の事を『根元事

象』と言います。更に、どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ であることを指して、それら6つの根元事象は全て『同様に確からしい』などとも言います。

8.3 基本的な考え方 -サイコロと袋中の玉-

例えばサイコロを振る場合、出る目には1から6の6種類のヴァリエーションがありますが、サイコロの場合はどの目も出る確率は同じ $\frac{1}{6}$ です (同様に確からしい)。

従って、サイコロを振って奇数が出る場合は、同じ確率で出る6種類の結果のうち1、3、5の3種類が該当しますから、その確率は $\frac{1}{2}$ です：

$$\frac{(\text{該当するヴァリエーションの総数})}{(\text{全てのヴァリエーションの総数})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

しかし袋の中に色だけ違う同じ形の玉 (つまり、手探りでは判別出来ないと言う事です) が幾つか入っている状況で袋の中から1個を取り出す事を考えるとサイコロの場合とは少し事情が違う事が分かります。

例えば袋の中味が赤玉が3個、白玉2個、青玉1個だった時に、袋の中から1個取り出したときの『結果』は赤・白・青の3種類しかありませんが、明らかにこの3種類の『結果』は出る確率が異なります (同様に確からしくはありません)。

色が塗ってある以前にそれは玉な訳です。同じ色が塗ってあったとしても2つの白玉は互いに異なる玉であって区別されるはずで。

従ってこのような場合に根元事象として考えるべき事は『どの玉が出るか』なのです。

そこで、仮に玉全てに名前をつけて $R_1, R_2, R_3, W_1, W_2, B_1$ としましょう。そう考えれば取り出した結果のヴァリエーションは6種類あることが分かりますし、この6種類の結果は全て同じ確率で起きるであろう事が分かります。

そうすると出た玉が白玉である場合を考えると、該当する結果のヴァリエーションは W_1, W_2 の2種類であり、全ての結果のヴァリエーションは6種類ですから、取り出した玉が白玉である確率は、

$$\frac{(\text{該当するヴァリエーションの総数})}{(\text{全てのヴァリエーションの総数})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

となるでしょう。

定理 8.3.1 ある試行において全ての結果のヴァリエーションが N 通りあり、そのどれもが同じ確率 $\frac{1}{N}$ で起こると仮定します。

この状況下で、試行の結果に関するある事象 E の確率 $P(E)$ は以下の通りです：

$$P(E) = \frac{(E \text{ に該当する結果のヴァリエーションの総数})}{N}.$$

演習問題 8.1 トランプ 52 枚をよく切って 1 枚を抜くとき、ハートが出る事象を A 、絵札が出る事象を B とします。 $P(A), P(B)$ を求めて下さい。

演習問題 8.2 袋の中に赤玉 4 個、白玉 3 個、合わせて 7 個の玉が入っています。どの玉が取り出される事も同様に確からしいものとして、この袋の中から玉を 1 つ取り出すとき、それが白玉である確率を求めて下さい。

8.4 複数個を同時に振った／取り出したときの結果について

問題 8.4.1 [教科書 例題 12.1(1)] 2 枚の硬貨を投げるとき、2 枚とも表である確率を求めて下さい。

分かり易く 2 枚の硬貨に名前をつければ全ての結果は表のようになります。従って求める確率は $\frac{1}{4}$ です。 □

硬貨 C_1	表	表	裏	裏
硬貨 C_2	表	裏	表	裏

演習問題 8.3 [教科書 例題 12.1(2)(3)] 次の枚数の硬貨を同時に投げて、表が 2 枚出る確率を求めて下さい。

(2) 3 枚 (3) 5 枚

問題 8.4.2 7 本のくじの中に当たりくじが 4 本あります。このくじを 3 本引くとき、2 本だけ当たる確率を求めて下さい。

当たり／ハズレを考える以前にくじは 7 本ありますのでどのくじが出て来るのか結果のヴァリエーションは ${}_7C_3$ 通りあり、また、当たりが丁度 2 本である様な結果のヴァリエーションは ${}_4C_2 \cdot 3$ 通りですから求める確率は以下の通りです：

$$\frac{{}_4C_2 \cdot 3}{{}_7C_3} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 3}{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{18}{35}. \quad \square$$

演習問題 8.4 [教科書 問題 12.3] 袋の中に白玉 6 個、赤玉 4 個が入っています。次の確率を求めて下さい。

- (1) 同時に 3 個取り出すとき、3 個とも白玉である確率。
- (2) 同時に 5 個取り出すとき、3 個が白玉、2 個が赤玉である確率。
- (3) 同時に 5 個取り出すとき、白玉が 3 個以上含まれている確率。

演習問題 8.5 [教科書 問題 12.4] 20 個の製品の中に 2 個の不良品が混ざっています。この中から 5 個を取り出すとき、その中に不良品が入っていない確率を求めて下さい。

8.5 Exercise

演習問題 8.6 2 人がじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めて下さい。

演習問題 8.7 2 個のさいころを同時に振って、出る目の和が 5 となる確率を求めて下さい。

演習問題 8.8 1、2、3、4、5 の数字が書かれているカードが入っている箱があります。この箱から順に 3 枚のカードを取り出し左から並べて 3 けたの整数を作るとき、500 以上の偶数が出来る確率を求めて下さい。

演習問題 8.9 3 つのさいころを振るとき、出る目がすべて異なる確率を求めて下さい。