9　和事象の確率・条件付き確率

9.1　3 の倍数、または 4 の倍数

（公平な）サイコロを 1 個振ったとき、『出目が 2 の倍数である』と云う事象を A、『出目が 3 の倍数である』と云う事象を B、『出目が 4 の倍数である』と云う事象を C とすれば、事象 A, B, C の確率 $P(A), P(B), P(C)$ はそれぞれ以下の通りです：

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{1}{6}$$

『事象 B, C のうち少なくともいずれか一方が起きる』場合、つまり、『出目が 3 の倍数であるかまたは 4 の倍数である』と云う事象を考えると（これを記号 $B \cup C$ で表します）、6 通りある全ての結果のうち 3 か 4 の倍数は 3、4、6 の 3 通りありますから

$$P(B \cup C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = P(B) + P(C)$$

です。

しかし、事象 $A \cup B$ を考えるとこれは『出目が 2 か 3 の倍数である』ですから、全ての結果のうち該当する結果のヴァリエーションは 2、3、4、6 の 4 通りであって

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} \neq \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = P(A) + P(B)$$

であり、いつも足し算で計算出来るわけではありません。分子・分母を良く見てみると、

$$P(A) + P(B) = \frac{\sharp\{2,4,6\}}{\sharp\{1,2,3,4,5,6\}} + \frac{\sharp\{3,6\}}{\sharp\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{\sharp\{2,3,4,6_{\text{その1}}, 6_{\text{その2}}\}}{\sharp\{1,2,3,4,5,6\}}$$

と云う具合に単純に $P(A) + P(B)$ としたのでは、2 の倍数でもあり 3 の倍数でもある 6 を重複して 2 回カウントしてしまっている事が分かります。

9.2　和事象、積事象

定義 **9.2.1** 事象 A, B に対し『A, B のうち少なくとも一方は起きる』と云う事象を A, B の和事象と言い、記号で $A \cup B$ 表します。

また、『事象 A, B が同時に起こる』と云う事象は A, B の積事象と呼ばれ、記号 $A \cap B$ で表します。

同じ確率で起こる N 個の（根元）事象のうち、事象 A に該当するものは N_A 通りのヴァリエーションがあり、事象 B に該当するものは N_B 通りだったとしましょう。

更に事象 A, B の両方に該当するものが $N_{A\cap B}$ 通りあるとするなら、『A か B の少なくともいずれか一方に該当するもの』は $N_A + N_B - N_{A\cap B}$ 通りあります。従って

$$P(A \cup B) = \frac{N_A + N_B - N_{A\cap B}}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} - \frac{N_{A\cap B}}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

が成り立っており、もしも $P(A \cap B) = 0$ であるならば、つまり、事象 A と事象 B が同時に起こる事がない場合には $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ が成り立ちます。このような場合、A と B は互いに排反であると言います。

定義 **9.2.2** 2 つの事象 A, B が同時に起こらないとき、これらは互いに排反である（mutually exclusive）と言います。

これは根元事象のうち A, B 双方に該当するものが 1 つもないと云う事であり、その意味も込めて空集合の記号 $\emptyset$を使って $A \cap B = \emptyset$ と書いたり、積事象 $A \cap B$ は空事象 $\emptyset$であるとも言うでしょう。どんな事象であれ、それに該当する根元事象のヴァリエーションが 0 通りである様な事象は全て空事象と呼ばれこの記号で表現されます。

9.3　余事象

事象 A に対してその“否定”を考えましょう。

（公平な）サイコロを 1 回振ると云う試行において、『出目が 2 の倍数である』ことを事象 A とするならばその否定は『出目が 2 の倍数でない』です。事象 A の“否定”事象の事を A の余事象（complementary event）と言って記号 $\bar{A}$ で表します。

当たり前ですがこの 2 つの事象 $A, \bar{A}$ は同時には起きませんので互いに排反です。しかも、全ての結果（根元事象）は事象 A に該当するか、該当しないかいずれかですから、全てのヴァリエーション N 通りのうち、事象 A に該当するものを除いた残り全てが事象 $\bar{A}$ に該当します。これはそれぞれの該当するヴァリエーションの総数を $N_A, N_{\bar{A}}$ とすれば $N_A + N_{\bar{A}} = N$ と云う事を意味しますから確率を計算すると

$$\frac{N_A}{N} + \frac{N_{\bar{A}}}{N} = \frac{N}{N}$$
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad \text{従って} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

が成り立ちます。

問題 **9.3.1 [** 教科書　例題 **12.3]** 袋の中に 1 から 10 までの番号がつけられた白玉 10 個と、11 から 15 までの番号がつけられた赤玉 5 個が入っています。その袋の中から 1 個の玉を取り出すとき、次の確率を求めて下さい。
(1) 番号が奇数の白玉である。　(2) 番号が奇数か白玉である。

事象 A：『奇数である』、事象 B：『白玉である』とすれば確率は以下の通りです：

$$P(A)=\frac{8}{15},\quad P(B)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

(1) 事象を数字で表せば、事象 $A\cap B$：{1,3,5,7,9} ですから、以下の通りです：

$$P(A\cap B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

(2) これは $A\cup B$ であり、

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{8}{15}+\frac{10}{15}-\frac{5}{15}=\frac{13}{15}$$

となります。 □

演習問題 **9.1 [** 教科書　問題 **12.5]** トランプのカード 52 枚のうち、A、K、Q、J を絵札とします。 1 枚のカードを取り出すとき、次の確率を求めて下さい。
(1) ハートの絵札である確率。　(2) ハートの札でも絵札でもない確率。

(1) $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}.$

(2)

$$\begin{aligned}
P(\text{ハートの札でも絵札でもない}) &= P(\{\text{ ハートでない }\}\cap\{\text{ 絵札でない }\})\\
&= 1-P(\{\text{ ハートである }\}\cup\{\text{ 絵札である }\})\\
&= 1-\big\{P(\text{ハートである})+P(\text{絵札である})\\
&\qquad -P(\{\text{ ハートである }\}\cap\{\text{ 絵札である }\})\big\}\\
&= 1-\frac{13}{52}-\frac{16}{52}+\frac{4}{52}\\
&= \frac{27}{52}
\end{aligned}$$

□

9.4　条件付き確率

定義 **9.4.1** 試行の結果である有限個の根元事象（これらは同じ確率をもつと仮定します）のうち、事象 A に該当するものが少なくとも 1 つ以上あるとき、その中での事象 B に該当する（従って A, B 両方に該当する）ものの割合の事を『A と云う条件のもとでの B の条件付き確率』(the conditional probability of B given A）と言い、記号 $P_A(B)$ あるいは $P(B\,|\,A)$ で表します。

数学の世界の標準では $P(B\,|\,A)$ が使われますが、高校数学等では $P_A(B)$ が使われます。教科書も後者なのでここでも後者を採用しておきます。

問題 **9.4.2** よく切ったトランプ 52 枚から 1 枚を抜くとき、その札がハートである事象を A、絵札である事象を B とします。このとき $P_A(B), P_B(A)$ を求めて下さい。

1 枚抜くと云う試行の結果（根元事象）は全部で 52 通りのヴァリエーションがあり、いずれも同じ確率 $\frac{1}{52}$ をもちます。

その結果のうち事象 A に該当するものは 13 通りあり、B に該当するものは 12 通りあります。
また、$A\cap B$ に該当するものは 3 通りありますから、求める条件付きの確率は以下の通りです：

$$P_A(B)=\frac{3}{13},\quad P_B(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

□

ちなみに言うと、$P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}=P_B(A)$ となっており、B と云う条件があろうとなかろうと A の確率は変わりませんね。これはむしろ特殊な事であって、普通は条件を付けると確率は変わります。

演習問題 9.2 1、2、3、4 組に編成されている学年を対象に数学のテストを行い、80 点以上の得点者数を調べました（表）。この学年の学生をくじ引きで 1 名選ぶとき、その学生が 1 組に属する事象を A、その学生の得点が 80 点以上である事象を B とします。このとき $P_A(B)$ および $P_B(A)$ を求めて下さい。

組	1 組	2 組	3 組	4 組	計
受験者	40	40	40	40	160
80 点以上	15	13	14	12	54

学生を 1 名選ぶ試行においてその結果（根元事象）は 160 通りあり、全て同じ確率 $\frac{1}{160}$ をもちます。

そのうち事象 A に該当するものは 40 通り、事象 B に該当するものは 54 通りあり、事象 $A \cap B$ に該当するものは 15 通りあります。従って求める条件付きの確率は

$$P_A(B) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}, \qquad P_B(A) = \frac{15}{54} = \frac{5}{18}$$

となります。 □

9.5　データとして確率のみが与えられている場合

基本的には今見た様に該当する根元事象の数を数えて比をとれば条件付きの確率が計算出来るのですが、対象となっている２つの事象の確率を使って計算する方法もあり、特にサンプル数は明示されずに事象の確率だけが与えられている様な場合に有効です。

ある試行の全ての結果（根元事象）の総数が N であり、全て同じ確率 $\frac{1}{N}$ をもつとします。また、調査対象となっている事象 A, B に該当する結果の数がそれぞれ $N_A \neq 0, N_B$ であったとし、更に積事象 $A \cap B$ に該当する結果の総数が $N_{A\cap B}$ であるならば、

$$P_A(B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A\cap B}}{N}}{\frac{N_A}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

が成り立っています（仮定から $P(A) \neq 0$）。これを変形すれば次のようになります：

定理 9.5.1 [確率の乗法定理] $P(A), P(B) \neq 0$ のとき、次の関係式が成り立ちます：

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

問題 9.5.2 ある会社の社員について調査したところ、昼食に定食を食べた人が 5 ％いて、その中の 30 ％の人が食後にコーヒーを飲んでいました。社員 1 名を任意に選ぶとき、その人が昼食に定食を食べ、食後にコーヒーを飲んだ人である確率を求めて下さい。

社員 1 名を抽出する試行においてその人が昼食に定食を食べた人であると云う事象を A、食後にコーヒーを飲んだと云う事象を B とします。与えられたデータから

$$P(A) = \frac{5}{100}, \quad P_A(B) = \frac{30}{100}$$

ですから、求める確率は

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{5 \cdot 30}{100^2} = \frac{3}{200}$$

であることが分かります。 □

演習問題 9.3 ある日の鉄道の乗客のうち 40 ％が定期券の利用者で、そのうちの 15 ％が通学定期券の利用者です。さらにそのうちの 30 ％が大学生です。乗客の中から任意に 1 人を選び出したとき、その人が大学生の通学定期券利用者である確率を求めて下さい。

１人の乗客を選ぶ試行においてその人が定期券の利用者である事象を A、通学定期券利用者である事象を B、大学生である事象を C とします。

問題文に与えられたデータによれば

$$P(A) = \frac{40}{100}, \quad P_A(B) = \frac{15}{100}, \quad P_{A\cap B}(C) = \frac{30}{100}$$

ですから、求める確率 $P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C)$ は以下の通りです：

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap B)P_{A\cap B}(C) \\ &= P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(C) \\ &= \frac{40}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{30}{100} \\ &= \frac{9}{500}. \end{aligned}$$

□

9.6　Exercise

演習問題 9.4 トランプ 52 枚をよく切って 1 枚を抜くとき、絵札が出る事象を A、ハートが出る事象を B とします。次の問いに答えて下さい。

(1) $A \cap B$, $\bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cup \bar{B}$ はそれぞれどんな事象ですか。

(2) $A \cup B$ と C が互いに排反になるような事象 C の例を作って下さい。

(1)

$A \cap B$	ハートの絵札が出る事象
$\bar{B}$	ハートが出ない事象（あるいは、ハート以外が出る事象）
$\bar{A} \cap B$	ハートの 1〜10 が出る事象
$A \cup \bar{B}$	絵札か、またはハート以外が出る事象

(2) $A \cup B$ はハートか、または絵札が出る事象ですから、これと同時に起きない様な事象としては例えば『スペードの２が出る事象』があります。 □

演習問題 9.5 ２つのさいころを振るとき、目の和が 6 となる事象を A、目の和が 9 となる事象を B とします。次の確率を求めて下さい。

(1) $P(A)$　(2) $P(B)$　(3) $P(A \cup B)$

(1) 目の和が６となる結果のヴァリエーションは $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ の５通りあり、全ての結果が $6 \times 6 = 36$ 通りですから求める確率は $P(A) = \frac{5}{36}$ です。

(2) 同様に目の和が９となる結果のヴァリエーションは $(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$ の４通りであり、従って求める確率は $P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ です。

(3) ２つの事象 A, B は同時には起きませんから、求める確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

です。 □

演習問題 9.6 袋の中に白玉 4 個、黒玉 5 個が入っています。これから 3 個の玉を取り出すとき、次の各事象が起こる確率を求めて下さい。

(1) 3 個とも同色である。　(2) 白玉と黒玉の両方が含まれる。

(1) 取り出した結果のヴァリエーションは 9 個の玉のうちの３個を（同時に、従って順序は付けずに組として）取り出すわけですから ${}_9\mathrm{C}_3$ 通りありますが、このうち 3 個とも同色である様な結果のヴァリエーションは、まず全て白玉の場合で ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り、全て黒玉の場合で ${}_5\mathrm{C}_3$ 通りあります。従って求める確率 P は

$$P = \frac{{}_4\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} + \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{24+60}{9\cdot8\cdot7} = \frac{1}{6}$$

です。

(2) これは (1) の事象の余事象ですから求める確率は $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ です。 □

演習問題 9.7 袋の中に赤玉、白玉、黒玉が 10 個ずつ、それぞれ 1 から 10 までの番号がつけられて入っています。この袋の中から玉を 1 つ取り出すとき、赤玉である事象を A、番号が 1、2、3 のいずれかである事象を B とします。このとき、次の確率を求めて下さい。

(1) $P(A \cup B)$　(2) $P(\bar{A} \cup B)$　(3) $P(A \cup \bar{B})$

(1) まず基本的な確率を求めておきましょう。

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}, \quad P(A \cap B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

すると、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{10}{30} + \frac{9}{30} - \frac{3}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

が分かります。

(2)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

ですので、

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = \frac{20}{30} + \frac{9}{30} - \frac{6}{30} = \frac{23}{30}$$

となります。

(3) いや、別にね、そんなやり方でやらなければならない事はないんですよ。その事象がどう云う事象なのかきちんと見極めて、該当する結果のヴァリエーションをきっちり数えてやればいいんです。

この事象は『赤玉であるか、または、番号が 4〜10 であるかどちらか』と云う事象ですので該当するものは 24 個あります。従って求める確率は

$$P(A \cup \bar{B}) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

となります。 □

演習問題 9.8 8 本のくじの中に当りくじが 2 本あり、A, B の 2 人が順に 1 本ずつ引くとき、次の確率を求めて下さい。ただし、A は引いたくじを戻さないとします。

(1) A が当たる。　(2) A が当たって B も当たる。

(3) A がはずれて B が当たる。　(4) B が当たる。

２人がくじを順に引くと云う試行を考え、A が当たると云う事象を E_1、B が当たる事象を E_2 とします。

(1) B が当たる外れるに関係なく、A の結果だけで事象 E_1 は決まります。全ての結果は 8×7 通りのヴァリエーションがあり、そのうち A が当たるものは 2×7 通りですから、求める確率は以下の通りです：

$$P(E_1) = \frac{2 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{1}{4}.$$

(2) 全ての結果のうち、A, B 共に当たっているものが幾つあるか数えます。まず A が引いたくじのヴァリエーションは 2 つのうちの 1 つですから 2 通りですが、そのそれぞれの場合について、B が引いた当たりは残り 1 つの当たりに決まってしまいますからここにはヴァリエーションはなく、従って 2 人とも当たっている結果のヴァリエーションは 2 通りのみです。従って求める確率は以下の通りです：

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8 \cdot 7} = \frac{1}{28}.$$

(3) まず A が引いたくじのヴァリエーションは 6 通りあり、そのそれぞれについて B の引いた当りくじには 2 通りずつのヴァリエーションがありますから、A が外れて B が当たる事象に該当する結果は 6×2 通りあります。従って求める確率は

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{14}$$

です。

(4) (1) と同じで全ての結果のうちで B が当たっているものの数は 2 通りですから

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

です。 □

演習問題 9.9 あるクラスで国語、数学、英語の学力テストを行ったところ、国語の得点が 70 点以上の者が 7 割あり、そのうち 6 割は数学の得点も 70 点以上で、さらにそのうちの 4 割は英語の得点も 70 点以上でした。このクラスの学生をくじ引きで 1 名選ぶとき、その学生の国語、数学、英語の得点がどれも 70 点以上である確率を求めて下さい。

各事象 A, B, C を、

A：国語 70 点以上　B：数学 70 点以上　C：英語 70 点以上

とします。問題文のデータから

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P_A(B) = \frac{6}{10}, \quad P_{A \cap B}(C) = \frac{4}{10}$$

ですから、

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P_{A \cap B}(C) = P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(C) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 4}{10^3} = \frac{21}{125}$$

が分かります。 □