

9 和事象の確率・条件付き確率

9.1 3の倍数、または4の倍数

サイコロを1個振ったとき、『出目が2の倍数である』と云う事象を A 、『出目が3の倍数である』と云う事象を B 、『出目が4の倍数である』と云う事象を C とします。

$$P(B \cup C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = P(B) + P(C), \quad P(A \cup B) = \frac{4}{6} \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = P(A) + P(B).$$

9.2 和事象、積事象

定義 9.2.1 事象 A, B に対し『 A, B のうち少なくとも一方は起きる』と云う事象を A, B の和事象と言い、記号で $A \cup B$ 表します。

また、『事象 A, B が同時に起こる』と云う事象は A, B の積事象と呼ばれ、記号 $A \cap B$ で表します。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

定義 9.2.2 2つの事象 A, B が同時に起こらないとき、これらは互いに排反である (mutually exclusive) と言い、空集合の記号 $\emptyset$ を使って $A \cap B = \emptyset$ と書いたり、積事象 $A \cap B$ は空事象 $\emptyset$ であるとも言います。

9.3 余事象

事象 A の“否定”事象の事を A の余事象 (complementary event) と言って記号 $\bar{A}$ で表します。この2つの事象 $A, \bar{A}$ は互いに排反であり、また、どちらかが必ず起きます。

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

問題 9.3.1 [教科書 例題 12.3] 袋の中に1から10までの番号がつけられた白玉10個と、11から15までの番号がつけられた赤玉5個が入っています。その袋の中から1個の玉を取り出すとき、次の確率を求めて下さい。

(1) 番号が奇数の白玉である。 (2) 番号が奇数が白玉である。

(1) 事象を数字で表せば、事象 $A \cap B : \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ですから、以下の通りです：

$$P(A \cap B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

(2) 事象 A : 『奇数である』、事象 B : 『白玉である』とすれば、以下の通り：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{15} + \frac{10}{15} - \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$$

□

演習問題 9.1 [教科書 問題 12.5] トランプのカード52枚のうち、 A 、 K 、 Q 、 J を絵札とします。1枚のカードを取り出すとき、次の確率を求めて下さい。

(1) ハートの絵札である確率。 (2) ハートの札でも絵札でもない確率。

9.4 条件付き確率

定義 9.4.1 試行の結果である有限個の根元事象（これらは同じ確率をもつと仮定します）のうち、事象 A に該当するものが少なくとも1つ以上あるとき、その中の事象 B に該当する（従って A, B 両方に該当する）ものの割合の事を『 A と云う条件のもとでの B の条件付き確率』(the conditional probability of B given A) と言い、記号 $P_A(B)$ あるいは $P(B|A)$ で表します。

問題 9.4.2 トランプ52枚から1枚を抜くとき、その札がハートである事象を A 、絵札である事象を B とします。このとき $P_A(B), P_B(A)$ を求めて下さい。

1枚抜くと云う試行の結果（根元事象）は全部で52通りのヴァリエーションがあり、いずれも同じ確率 $\frac{1}{52}$ をもちます。

その結果のうち事象 A に該当するものは13通りあり、 B に該当するものは12通り、 $A \cap B$ に該当するものは3通りありますから、求める条件付きの確率は以下の通りです：

$$P_A(B) = \frac{3}{13}, \quad P_B(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

□

演習問題 9.2 1、2、3、4 組に編成されている学年を対象に数学のテストを行い、80 点以上の得点者数を調べました (表)。この学年の学生をくじ引きで 1 名選ぶとき、その学生が 1 組に属する事象を A 、その学生の得点が 80 点以上である事象を B とします。このとき $P_A(B)$ および $P_B(A)$ を求めて下さい。

組	1 組	2 組	3 組	4 組	計
受験者	40	40	40	40	160
80 点以上	15	13	14	12	54

9.5 データとして確率のみが与えられている場合

$$P_A(B) = \frac{N_{A \cap B}}{N_A} = \frac{\frac{N_{A \cap B}}{N}}{\frac{N_A}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

定理 9.5.1 [確率の乗法定理] $P(A), P(B) \neq 0$ のとき、次が成り立ちます：

$$P(A \cap B) = P(A)P_B(A) = P(B)P_A(B).$$

問題 9.5.2 ある会社で調査したところ、昼食に定食を食べた人が 5 % いて、その中の 30 % の人が食後にコーヒーを飲んでいました。社員 1 名を任意に選ぶとき、その人が昼食に定食を食べ、食後にコーヒーを飲んだ人である確率を求めて下さい。

社員 1 名を抽出する試行においてその人が昼食に定食を食べた人であると言う事象を A 、食後にコーヒーを飲んだと言う事象を B とします。与えられたデータから

$$P(A) = \frac{5}{100}, \quad P_A(B) = \frac{30}{100}$$

ですから、求める確率は $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{5 \cdot 30}{100^2} = \frac{3}{200}$ です。

□

演習問題 9.3 ある日の鉄道の乗客のうち 40 % が定期券の利用者で、そのうちの 15 % が通学定期券の利用者です。さらにそのうちの 30 % が大学生です。乗客の中から任意に 1 人を選び出したとき、その人が大学生の通学定期券利用者である確率を求めて下さい。

9.6 Exercise

演習問題 9.4 トランプ 52 枚をよく切って 1 枚を抜くとき、絵札が出る事象を A 、ハートが出る事象を B とします。次の問いに答えて下さい。

- (1) $A \cap B$, $\bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cup \bar{B}$ はそれぞれどんな事象ですか。
- (2) $A \cup B$ と C が互いに排反になるような事象 C の例を作して下さい。

演習問題 9.5 2 つのさいころを振るとき、目の和が 6 となる事象を A 、目の和が 9 となる事象を B とします。次の確率を求めて下さい。

- (1) $P(A)$
- (2) $P(B)$
- (3) $P(A \cup B)$

演習問題 9.6 袋の中に白玉 4 個、黒玉 5 個が入っています。これから 3 個の玉を取り出すとき、次の各事象が起こる確率を求めて下さい。

- (1) 3 個とも同色である。
- (2) 白玉と黒玉の両方が含まれる。

演習問題 9.7 袋の中に赤玉、白玉、黒玉が 10 個ずつ、それぞれ 1 から 10 までの番号がつけられて入っています。この袋の中から玉を 1 つ取り出すとき、赤玉である事象を A 、番号が 1、2、3 のいずれかである事象を B とします。このとき、次の確率を求めて下さい。

- (1) $P(A \cup B)$
- (2) $P(\bar{A} \cup B)$
- (3) $P(A \cup \bar{B})$

演習問題 9.8 8 本のくじの中に当りくじが 2 本あり、 A, B の 2 人が順に 1 本ずつ引くとき、次の確率を求めて下さい。ただし、 A は引いたくじを戻さないとしします。

- (1) A が当たる。
- (2) A が当たって B も当たる。
- (3) A がはずれて B が当たる。
- (4) B が当たる。

演習問題 9.9 あるクラスで国語、数学、英語の学力テストを行ったところ、国語の得点が 70 点以上の者が 7 割あり、そのうち 6 割は数学の得点も 70 点以上で、さらにそのうちの 4 割は英語の得点も 70 点以上でした。このクラスの学生をくじ引きで 1 名選ぶとき、その学生の国語、数学、英語の得点がどれも 70 点以上である確率を求めて下さい。