

10 事象の独立性

10.1 定義

前回に見た例題の通り、52 枚のトランプの中から 1 枚引いてハートが出る事象を A 、絵札が出る事象を B とすると、

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P_B(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

の様に B と云う条件が付いても付かなくても確率は変わりませんでした、このとき

$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P(A)P(B)$$

が成り立っています。また、

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\{1 - P(B)\} = P(A)P(\bar{B})$$

も成り立ちますから $P_{\bar{B}}(A) = P(A)$ であって、事象 B が起きなかった場合でも、 A の確率は変わりません。つまり、事象 B が起きていようが起きていなかろうが事象 A の結果には（確率として）関係ないと云う事です。

また、もしも式 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立てば、

$$P(A)P_A(B) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

などから全く同様に $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ も分かりますから、逆に事象 A が起きようと起きまいと事象 B の確率には関係ありません。

結果的に、2 つの事象 A, B は互いに相手に影響を及ぼしていません。そこでこの式

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことをもって『2 つの事象 A, B は（互いに）独立である』と定義する事にします。

以上の話／定義は条件付き確率を使っていますので細かい話をすれば $P(A), P(B) \neq 0$ の時にのみ通用する話／定義でしたが、この最後の式のみを見ると、ここには形式上条件付き確率は現れませんので、これは別に $P(A) = 0$ であったり $P(B) = 0$ であってもいいわけです。

いや、良いどころか、仮に $P(A) = 0$ なら当然 $P(A \cap B) = 0$ ですから、 $0 = 0$ の意味で式 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ は成り立ってしまいます（ $P(B) = 0$ の時も同様）。

定義 **10.1.1** 2 つの事象 A_1, A_2 に対して、次式が成り立っているとき：

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

事象 A_1, A_2 は独立である（mutually independent）と言います。

問題 **10.1.2** 1 つのさいころを 2 回振るとき、1 回目に偶数、2 回目に 3 の倍数が出る確率を求めて下さい。

1 回目に何が出るかと云う事と 2 回目に何が出るかと云う事の間には全く相互関係がありません。1 回目に例えば 3 が出たからと言ってそれが 2 回目の出目に影響を与えないと云う事です。

つまりこのような場合は 1 回目に偶数が出ると云う事象（これを事象 A とします）と 2 回目に 3 の倍数が出ると云う事象（ B ）は互いに独立であるはずで。

実際に計算すればこれらの事象が互いに独立であることを確かめる事は出来ませんが、この様に同じ行為を全く同じ条件で繰り返す場合など明らかに独立である場合には、証明抜きで『これらの事象は互いに独立なので』として頂いて構いません。

従って求める確率は、独立性から次のようになります：

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

□

演習問題 **10.1** 1 から 600 までの整数から 1 つ選ぶとき、それが偶数である事象を A 、3 の倍数である事象を B とすると、 A と B とは互いに独立でしょうか。また、1 から 400 までの整数から選ぶ場合はどうでしょうか。

実際に該当する結果のヴァリエーションを数えてみると、

$$P(A) = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

ですから、

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立っており、2 つの事象 A, B は独立です。

1 から 400 までの整数から 1 つ選ぶ場合、偶数である事象を C 、3 の倍数である事象を D としますと、1 から 400 までの中に 3 の倍数は 133 個 (399 まで)、6 の倍数は 66 個 (396 まで) ですから

$$P(C) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}, \quad P(D) = \frac{133}{400}, \quad P(C \cap D) = \frac{66}{400}$$

であり、

$$P(C \cap D) = \frac{66}{400} \neq \frac{66.5}{400} = P(C)P(D)$$

となってこれら 2 つの事象は独立ではありません。 □

演習問題 10.2 [Bernstein, 1928] 箱の中に 4 枚のチケットが入っており、それぞれ次の様に 3 桁の数字が記されています：

112, 121, 211, 222

箱の中から 1 枚のチケットを取り出すとき、次の 3 つの事象を考えます：

A_1 ： 一番左の数字が 1 である

A_2 ： 真ん中の数字が 1 である

A_3 ： 一番右の数字が 1 である

(1) $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ を計算して下さい。

(2) $P(A_1 \cap A_2), P(A_2 \cap A_3), P(A_3 \cap A_1)$ を計算して下さい。

(3) A_1, A_2 は独立でしょうか？ 他の組み合わせはどうですか？

(4) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ を計算し、 $P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ と一致するかどうか確かめて下さい。

$$(1) P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(2) P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}, \quad P(A_3 \cap A_1) = \frac{1}{4}$$

(3) 異なる 2 つの事象の組み合わせは全て互いに独立です。

$$(4) P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0, \quad P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8} \text{ ですから一致しませんね。} \quad \square$$

演習問題 10.3 白・黒の 2 つのさいころを同時に振って 3 つの事象を考えます：

A_1 ： 白いさいころの目が 1、2、3 のいずれか

A_2 ： 白いさいころの目が 3、4、5 のいずれか

A_3 ： 2 つのさいころの目の和が 9

(1) $P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ を求めて下さい。

(2) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ が成り立つ事を確かめて下さい。

(3) $P(A_1 \cap A_2), P(A_2 \cap A_3), P(A_3 \cap A_1)$ を求め、2 つの異なる事象の組が独立であるかどうか見て下さい。

(1) 目の和が 9 となるのは

3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3

ですから

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36}$$

です。

(2) 上の結果より、確かに成り立っています。

(3)

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(A_2)P(A_3)$$

$$P(A_3 \cap A_1) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A_3)P(A_1)$$

ですから、どの 2 つも独立ではありません。 □

演習問題 10.4 上の 2 つの問題の結果を踏まえて、3 つ以上の事象の組が『互いに独立である』ことはどのように定義したら良いか考えて下さい。

例えば 3 つの事象のコレクション $\{E_1, E_2, E_3\}$ が互いに独立であることを

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

が成り立つ事と定義すると 3 つの事象については積事象の確率が確率の積になってくれますが、練習問題 10.3 の例の様に E_1 と E_2 は互いに独立ではないかも知れません。これでは事象の組として『独立である』と言うのはちょっと抵抗がありますね。

そこで、3 つの事象のコレクション $\{E_1, E_2, E_3\}$ が互いに独立であることを、3 つのうちどの 2 つの組み合わせも互いに独立であることと定義してみましょう。

しかしこの場合も演習問題 10.2 の例の様に 3 つまとめて考えた場合には

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \neq P(E_1)P(E_2)P(E_3)$$

となってしまう可能性があり、やはり 3 つの事象の組として『独立である』とは言えません。

そこで、3 つ以上の事象のコレクション $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ に対しては、任意のサブコレクション $\{E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_m}\}$ に対して

$$P(E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \cap \dots \cap E_{\lambda_m}) = P(E_{\lambda_1})P(E_{\lambda_2}) \cdots P(E_{\lambda_m})$$

が成り立つ事と定義します。

10.2 反復試行

問題 10.2.1 8 本のくじの中に当たりくじが 2 本含まれています。このくじを 1 本ずつ 2 回引くとき、2 本とも当たらない確率を次の引き方について求めて下さい。

- (1) 復元抽出 (1 回目に引いたくじを戻してから 2 回目を引く)
- (2) 非復元抽出 (1 回目に引いたくじを戻さずにそのまま 2 回目を引く)

【解答例その 1 独立性・条件付き確率を使う】 (1) この引き方の場合 1 回目の結果と 2 回目の結果は独立ですから、求める確率は

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{9}{16}$$

です。

(2) 1 回目に当たらない事象を A 、2 回目に当たらない事象を B とすれば、

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

です。

【解答例その 2 基本に戻って数える】 (1) 全ての結果のヴァリエーションは 8^2 通りあり、そのうち 2 回ともはずれている結果のヴァリエーションは 6^2 通りですから、求める確率は

$$\frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}$$

です。

(2) 全ての結果のヴァリエーションは 8×7 通りあり、またそのうち 2 回ともはずれているものは 6×5 通りですから、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

です。

演習問題 10.5 1 つのさいころを 4 回振るとき、次の確率を求めて下さい。

- (1) 1 の目が 2 回出る確率、
- (2) 1 の目が 2 回以上出る確率。

(1) 4 回の出目のヴァリエーションは 6^4 通りありますが、このうち 1 が 2 回出ているものは幾つあるか数えてみましょう。

まず 1 が 4 回のうち何回目に出ているかで ${}_4C_2$ 通りのヴァリエーションがあり、そのそれぞれについて 1 以外が出た時の出目について 5^2 通りのヴァリエーションがありますから結局全て合わせると ${}_4C_2 \times 5^2$ 通りあります。

従って求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5^2}{6^4 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{25}{216}$$

です。

(2) 1 が出なかった場合と 1 が 1 回しか出なかった場合の結果のヴァリエーション数を数えると

1 が出なかった場合： 5^4

1 が 1 回出た場合： ${}_4C_1 \times 5^3$

ですから、全体からこの和を引けば 1 が 2 回以上出た場合の結果のヴァリエーションの総数になります。

従って求める確率は

$$\frac{6^4 - 5^4 - 4 \cdot 5^3}{6^4} = 1 - \frac{9 \cdot 5^3}{6^4} = 1 - \frac{5^3}{12^2} = \frac{19}{144}$$

です。

□

演習問題 10.6 4 発中 1 発を命中させる射撃の腕をもつ者が、5 発撃ったときに 3 発命中させる確率を求めて下さい。

この場合は袋の中からくじを引く場合とは違って、結果の総数を数えるわけには行きません。そこで確率のみを使って計算していかねばなりません、事象の独立性を使えば上手く計算する事が出来ます。

【解答例その 1 独立性を使う】 5 回撃つわけですが、 m 回目に命中する事象を S_m 、 m 回目に外す事象を F_m としましょう。

すると、3 回命中すると云う事象 E は、

$$\begin{aligned} &F_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5, \quad F_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap S_4 \cap S_5, \\ &F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap F_4 \cap S_5, \quad F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap F_5, \\ &S_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap S_4 \cap S_5, \quad S_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap F_4 \cap S_5, \quad S_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap F_5, \\ &S_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap S_5, \quad S_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap S_4 \cap F_5, \\ &S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap F_4 \cap F_5 \end{aligned}$$

と云う 10 個の事象に分解されます。これは 5 回のうち何回目に命中したかと云う事で分類されており、その分類の数は ${}_5C_3 = 10$ となっているわけです。

また、これらの事象はいずれも同時には起きません（排反です）から、求める確率 $P(E)$ は、これら 10 個の事象の確率の和になります。

そこでその 10 個の事象それぞれの確率を考えると、5 回の射撃の各回の結果は互いに独立ですから、例えば

$$\begin{aligned} P(S_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap S_5) &= P(S_1)P(S_2)P(F_3)P(F_4)P(S_5) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3^2}{4^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5) &= P(F_1)P(F_2)P(S_3)P(S_4)P(S_5) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3^2}{4^5} \end{aligned}$$

などとなっており、10 個の事象全てが同じ確率になっています。従って求める確率は

$$P(E) = 10 \frac{3^2}{4^5} = \frac{45}{512}$$

となる事が分かります。

□

【解答例その 2 くじ引きに帰着させて数えてしまう】 この人は毎回の射撃で $\frac{1}{4}$ の確率で命中するわけですから、1 枚の当りくじ、3 枚のはずれくじが入った袋を用意して、射撃する代りに袋の中から 1 枚取り出しても確率として考えれば同じ事です。

従って問題はこの袋から復元抽出で 5 回くじを引くとき、3 回当たる確率を求めると云う事になります。

この場合、結果の全てのヴァリエーションは 4^5 通りあり、そのうち 3 回当たっている様なものは幾つあるか数えてみましょう。

まず当たりが何回目であったかのヴァリエーションで ${}_5C_3$ 通りあり、そのそれぞれについてはずれを引いた時ののはずれのバリエーションで 3^2 通りありますから、結局全てでは ${}_5C_3 \times 3^2$ 通りあります。

従って求める確率は

$$\frac{{}_5C_3 \cdot 3^2}{4^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3^2}{2 \cdot 1 \cdot 4^5} = \frac{45}{512}$$

です。

□

10.3 Exercise

演習問題 10.7 硬貨を 6 回投げるとき、次の事象の起こる確率を求めて下さい。

(1) 表が 3 回出る確率、 (2) 少なくとも 1 回表が出る確率。

(1) 全ての結果のヴァリエーションは 2^6 ありますが、このうち 3 回表であるものは、表が出たのが何回目と何回目であるかのヴァリエーションしかなく、それは ${}_6C_3$ 通りです。

従って求める確率は

$$\frac{{}_6C_3}{2^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2^6} = \frac{5}{16}$$

です。

(2) 全て裏が出る確率を求めるとその様な結果のヴァリエーションは 1 通りしかないので $\frac{1}{2^6}$ であることが分かります。その余事象が 1 回以上表が出ると言う事象であることから、求める確率は

$$1 - \frac{1}{2^6} = \frac{63}{64}$$

です。

□

演習問題 10.8 赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている袋の中から、1 個ずつ 5 回玉を復元抽出するとき、次の事象の起こる確率を求めて下さい。

(1) 赤玉が出ない。 (2) 赤玉が 1 回出る。 (3) 赤玉が 2 回以上出る。

(1) 赤玉が出ない場合、5 回全て白玉が出るわけであって、白玉には 2 個のヴァリエーションがあるので、赤が出なかった場合の場合の数は 2^5 通りあります。一方、全ての場合は 6^5 通りあるわけですから、求める確率は $\frac{2^5}{6^5} = \frac{1}{3^5}$ です。

(2) 赤玉が 1 回出る場合が何通りあるか数えます。まず赤玉が何回目に出るかで分ければ 5 通りあるわけですが、そのそれぞれについて出た赤玉がどの赤玉なのか 4 通りがあります。残りの白玉のヴァリエーションも 4 つについて 2 通りずつあるので合計で $5 \cdot 4 \cdot 2^4$ 通りあることが分かります。従って求める確率は $\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^4}{6^5} = \frac{10}{3^5}$ です。

(3) 赤玉が 2 回以上出る事象の余事象は赤玉が 0、1 回出ると言う事象ですので、(1)、(2) の結果から、求める確率は $1 - \frac{1}{3^5} - \frac{10}{3^5} = \frac{232}{3^5}$ です。 □

演習問題 10.9 6 本のくじの中に当たりくじが 2 本ある。A、B 2 人が順に 2 本ずつ引くとき、次の確率を求めて下さい。ただし非復元抽出とします。

(1) A も B も当たる確率。 (2) A がはずれ、B が当たる確率。

(3) B が当たる確率。

(1) くじの出方の総数は、 ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2$ 通りあります。そのうち A も B も当たる場合は、当たりの 2 つのうちどちらが A に行くかによって 2 通りあって、更にそのそれぞれの場合についてははずれのヴァリエーションは $4 \cdot 3$ 通りあります。

以上によって A も B も当たる場合は $2 \cdot 4 \cdot 3$ 通りある事になります。従って求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

です。

(2) A が外れ B が当たる場合のヴァリエーションは、まず A が引くはずれ 2 枚のヴァリエーションが ${}_4C_2$ 通りあって、そのそれぞれに対して B の方のヴァリエーションがあります。

B が当たり 2 枚を引く場合が 1 通りあり、また B が当たりを 1 枚だけ引く場合はどの当たりを引くかで 2 通りあって、更にそのそれぞれに対してもう 1 枚のはずれのヴァリエーションで 2 通り (4 枚あったはずれのうち 2 枚は既に A が引いていて残りは 2 枚) ある事が分かります。

従って A が外れて B が当たる場合は

$${}_4C_2(1 + 2 \cdot 2) = 5 \cdot {}_4C_2$$

通りあります。従って求める確率は

$$\frac{5 \cdot {}_4C_2}{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{3}$$

(3) B が当たる場合は A が当たっている場合と A が外れている場合に分ける事が出来、これらは互いに排反です。従って、(1)、(2) の結果から、求める確率は $\frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ です。 □

演習問題 **10.10** 赤玉 2 個、白玉 6 個の入っている袋と、赤玉 3 個、白玉 9 個の入っている袋からそれぞれ 2 個ずつの玉を同時に取り出すとき、赤玉が合計 3 個出る確率を求めて下さい。

第 1 の袋を A、第 2 の袋を B と呼ぶ事にします。赤玉 3 個の出自のヴァリエーションは A から 1 個、B から 2 個の場合と逆の場合があります。

そこで、A から n 個の赤玉を引く事象を A_n 、B から n 個の赤玉を引く事象を B_n として各事象の確率を求めておきましょう。

まず A_1 の場合は、赤玉の種類で 2 種類あって、もう 1 個の白玉の種類で 6 通りあります。全ての可能性は ${}_8C_2$ 通りありますから結局 $P(A_1) = \frac{2 \cdot 6}{{}_8C_2}$ です。

同様に数えて行けば B_2 は、赤のヴァリエーションで ${}_3C_2$ ありますから $P(B_2) = \frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_2}$ です。

$P(A_2), P(B_1)$ も同様に計算して、求める確率 p は、

$$\begin{aligned}
 p &= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \\
 &= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) \\
 &= \frac{2 \cdot 6}{{}_8C_2} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_{12}C_2} + \frac{1}{{}_8C_2} \cdot \frac{3 \cdot 9}{{}_{12}C_2} \\
 &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} + \frac{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} \\
 &= \frac{7 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} \\
 &= \frac{3}{88}
 \end{aligned}$$

となる事が分かります。

□