

10 事象の独立性

10.1 定義

定義 **10.1.1** 2つの事象 A_1, A_2 に対して、次式が成り立っているとき：

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

事象 A_1, A_2 は独立である (mutually independent) と言います。

問題 **10.1.2** 1つのさいころを 2 回振るとき、1 回目に偶数、2 回目に 3 の倍数が出る確率を求めて下さい。

1 回目に何が出るかと言う事と 2 回目に何が出るかと言う事の間には全く相互関係がありません。1 回目に例えば 3 が出たからと言ってそれが 2 回目の出目に影響を与えないと言う事です。

つまりこのような場合は 1 回目に偶数が出ると言う事象 (これを事象 A とします) と 2 回目に 3 の倍数が出ると言う事象 (B) は互いに独立であるはずで。

実際に計算すればこれらの事象が互いに独立であることを確かめる事は出来ませんが、この様に同じ行為を全く同じ条件で繰り返す場合など明らかに独立である場合には、証明抜きで『これらの事象は互いに独立なので』として頂いて構いません。

従って求める確率は、独立性から次のようになります：

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

□

演習問題 **10.1** 1 から 600 までの整数から 1 つ選ぶとき、それが偶数である事象を A 、3 の倍数である事象を B とすると、 A と B とは互いに独立でしょうか。また、1 から 400 までの整数から選ぶ場合はどうでしょうか。

演習問題 **10.2 [Bernstein, 1928]** 箱の中に 4 枚のチケットが入っており、それぞれ次の様に 3 桁の数字が記されています：

112, 121, 211, 222

箱の中から 1 枚のチケットを取り出すとき、次の 3 つの事象を考えます：

A_1 : 一番左の数字が 1 である

A_2 : 真ん中の数字が 1 である

A_3 : 一番右の数字が 1 である

- (1) $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ を計算して下さい。
- (2) $P(A_1 \cap A_2), P(A_2 \cap A_3), P(A_3 \cap A_1)$ を計算して下さい。
- (3) A_1, A_2 は独立でしょうか？ 他の組み合わせはどうですか？
- (4) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ を計算し、 $P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ と一致するかどうか確かめて下さい。

演習問題 **10.3** 白・黒の 2 つのさいころを同時に振って 3 つの事象を考えます：

A_1 : 白いさいころの目が 1、2、3 のいずれか

A_2 : 白いさいころの目が 3、4、5 のいずれか

A_3 : 2 つのさいころの目の和が 9

- (1) $P(A_1), P(A_2), P(A_3), P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ を求めて下さい。
- (2) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ が成り立つ事を確かめて下さい。
- (3) $P(A_1 \cap A_2), P(A_2 \cap A_3), P(A_3 \cap A_1)$ を求め、2 つの異なる事象の組が独立であるかどうか見て下さい。

演習問題 **10.4** 上の 2 つの問題の結果を踏まえて、3 つ以上の事象の組が『互いに独立である』ことはどのように定義したら良いか考えて下さい。

10.2 反復試行

問題 **10.2.1** 8本のくじの中に当たりくじが2本含まれています。このくじを1本ずつ2回引くとき、2本とも当たらない確率を次の引き方について求めて下さい。

- (1) 復元抽出 (1回目に引いたくじを戻してから2回目を引く)
- (2) 非復元抽出 (1回目に引いたくじを戻さずにそのまま2回目を引く)

【解答例その1 独立性・条件付き確率を使う】 (1) この引き方の場合1回目の結果と2回目の結果は独立ですから、求める確率は

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{9}{16}$$

です。

(2) 1回目に当たらない事象を A 、2回目に当たらない事象を B とすれば、

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

です。

□

【解答例その2 基本に戻って数える】 (1) 全ての結果のヴァリエーションは 8^2 通りあり、そのうち2回ともはずれている結果のヴァリエーションは 6^2 通りですから、求める確率は

$$\frac{6^2}{8^2} = \frac{9}{16}$$

です。

(2) 全ての結果のヴァリエーションは 8×7 通りあり、またそのうち2回ともはずれているものは 6×5 通りですから、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

です。

□

演習問題 **10.5** 1つのさいころを4回振るとき、次の確率を求めて下さい。

- (1) 1の目が2回出る確率、
- (2) 1の目が2回以上出る確率。

演習問題 **10.6** 4発中1発を命中させる射撃の腕をもつ者が、5発撃ったときに3発命中させる確率を求めて下さい。

10.3 Exercise

演習問題 **10.7** 硬貨を6回投げるとき、次の事象の起こる確率を求めて下さい。

- (1) 表が3回出る確率、
- (2) 少なくとも1回表が出る確率。

演習問題 **10.8** 赤玉4個と白玉2個が入っている袋の中から、1個ずつ5回玉を復元抽出するとき、次の事象の起こる確率を求めて下さい。

- (1) 赤玉が出ない。
- (2) 赤玉が1回出る。
- (3) 赤玉が2回以上出る。

演習問題 **10.9** 6本のくじの中に当たりくじが2本ある。A、B 2人が順に2本ずつ引くとき、次の確率を求めて下さい。ただし非復元抽出とします。

- (1) AもBも当たる確率。
- (2) Aがはずれ、Bが当たる確率。
- (3) Bが当たる確率。

演習問題 **10.10** 赤玉2個、白玉6個の入っている袋と、赤玉3個、白玉9個の入っている袋からそれぞれ2個ずつの玉を同時に取り出すとき、赤玉が合計3個出る確率を求めて下さい。