

11 色々な問題

11.1 条件／被条件の反転

全事象が互いに排反な 2 つの事象 A_1, A_2 に分解されていて、 A_1, A_2 の確率や A_1, A_2 を条件とした時の B の確率がそれぞれ分かっているときに、条件／被条件の関係を逆転して、 B を条件とした場合の A_1, A_2 の条件付き確率を求める事が出来ます。

条件付き確率、例えば $P_B(A_1)$ は

$$P(A_1 \cap B) = P_B(A_1)P(B)$$

を満たしていますから、

$$\begin{aligned} P_B(A_1) &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)} \\ &= \frac{P_{A_1}(B)P(A_1)}{P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2)} \end{aligned}$$

となるわけです。

ちなみに分母は分子との比較の為にこう書いていますが $P(B)$ に違いありません。 $P(B)$ が分かっている状況なら最初から $P(B)$ とすれば良いでしょうが、条件付き確率を使って $P(B)$ をまず計算しなくてはならない場合も多いでしょう。

また、今は全事象が 2 つに分割されている場合を見ましたが、別に 2 つでなくても 3 つでも幾つでも構いません。

問題 11.1.1 [教科書 問題 12.7] ある工場で 2 種類の機械 A、B を使って同じ製品を作っています。A と B の生産の割合は 3 : 2 であり、不良品の出る率はそれぞれ 4 %、5 %です。

(1) 任意に 1 個の製品を選んだとき、機械 A による製品である確率を求めて下さい。

(2) 1 個の不良品を選んだときそれが機械 A による製品である確率、つまり、不良品であると言う条件の下での機械 A による製品である確率を求めて下さい。

任意に 1 個取り出す試行において、それが機械 A による製品である事象を E_A 、B による製品である事象を E_B 、不良品である事象を E_F とします。

(1)

$$P(E_A) = \frac{3}{5}.$$

(2) まず、

$$P(E_F) = P(E_F \cap E_A) + P(E_F \cap E_B) = P_{E_A}(E_F)P(E_A) + P_{E_B}(E_F)P(E_B)$$

ですが、

$$P(E_A) = \frac{3}{5}, \quad P(E_B) = \frac{2}{5}, \quad P_{E_A}(E_F) = \frac{4}{100}, \quad P_{E_B}(E_F) = \frac{5}{100}$$

ですから

$$P(E_F) = \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{500}$$

が分かります。従って

$$P_{E_F}(E_A) = \frac{P(E_A \cap E_F)}{P(E_F)} = \frac{\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{22}{500}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

です。

□

演習問題 11.1 ある会社は、A、B、C 社から同じ製品を 2 : 3 : 5 の比率で購入しています。A、B、C 社の製品にはそれぞれ 2.5 %、1.5 %、1 %の割合で不良品が含まれていることが知られています。このとき次の確率を求めて下さい。

(1) これらの製品から任意に取り出した 1 個が不良品である確率。

(2) 取り出された不良品が A、B、C 社の製品であるそれぞれの確率。

【解答例その 1 通常の条件付き確率の計算】 1 個任意に取り出す試行に於いてそれが A、B、C 社の製品であると言う事象を E_A, E_B, E_C 、不良品であると言う事象を E_F とします。

(1) $P(E_F) = P(E_F \cap E_A) + P(E_F \cap E_B) + P(E_F \cap E_C)$ なので、

$$P(E_F \cap E_A) = P(E_A)P_{E_A}(E_F) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2.5}{100} = \frac{5}{1000}$$

$$P(E_F \cap E_B) = P(E_B)P_{E_B}(E_F) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1.5}{100} = \frac{4.5}{1000}$$

$$P(E_F \cap E_C) = P(E_C)P_{E_C}(E_F) = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{5}{1000}$$

によれば

$$P(E_F) = \frac{5 + 4.5 + 5}{1000} = \frac{145}{10000} = 0.0145$$

です。

(2) 条件付き確率の計算式から

$$P_{E_F}(E_A) = \frac{P(E_F \cap E_A)}{P(E_F)} = \frac{P_{E_A}(E_F)P(E_A)}{P(E_F)} = \frac{\frac{5}{1000}}{\frac{145}{10000}} = \frac{10}{29}$$

$$P_{E_F}(E_B) = \frac{P_{E_B}(E_F)P(E_B)}{P(E_F)} = \frac{\frac{4.5}{1000}}{\frac{145}{10000}} = \frac{9}{29}$$

$$P_{E_F}(E_C) = \frac{P_{E_C}(E_F)P(E_C)}{P(E_F)} = \frac{\frac{5}{1000}}{\frac{145}{10000}} = \frac{10}{29}$$

【解答例その 2 強引に数えてしまう方法】 1000 個単位で購入したとし、A 社から 2000 個、B 社から 3000 個、C 社から 5000 個買うと、A 社製 2000 個のうち 50 個が不良品であり、B 社製 3000 個のうち 45 個が不良品、C 社製 5000 個のうちでは 50 個が不良品であることになります。

(1) 不良品の確率は

$$\frac{(\text{不良品の個数})}{(\text{全体の個数})} = \frac{50 + 45 + 50}{10000} = \frac{145}{10000}$$

です。

(2) A 社製品については

$$\frac{(\text{A 社製かつ不良品の個数})}{(\text{不良品の個数})} = \frac{50}{145} = \frac{10}{29}$$

であり、B・C 社製品については

$$\frac{(\text{B 社製かつ不良品の個数})}{(\text{不良品の個数})} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}$$

$$\frac{(\text{C 社製かつ不良品の個数})}{(\text{不良品の個数})} = \frac{50}{145} = \frac{10}{29}$$

です。

□

演習問題 11.2 ある工場では従業員の 75 % が男性で、男性のうち 40 % の人が社宅に住み、女性の中の 20 % の人が社宅に住んでいます。社宅に住んでいる従業員の中からくじで 1 名選ぶとき、その従業員が男性である確率を求めて下さい。

【解答例その 1 通常の条件付き確率の計算】 従業員の中から 1 名選ぶ試行に於いて、男性である事象を E_m 、女性である事象を E_f 、社宅に住んでいる事象を E_s としましょう。

問題文に与えられているデータから分かる事は

$$P(E_m) = 0.75, \quad P(E_f) = 0.25, \quad P_{E_m}(E_s) = 0.4, \quad P_{E_f}(E_s) = 0.2$$

ですから、

$$\begin{aligned} P_{E_s}(E_m) &= \frac{P(E_s \cap E_m)}{P(E_s)} \\ &= \frac{P(E_s \cap E_m)}{P(E_s \cap E_m) + P(E_s \cap E_f)} \\ &= \frac{P_{E_m}(E_s)P(E_m)}{P_{E_m}(E_s)P(E_m) + P_{E_f}(E_s)P(E_f)} \\ &= \frac{0.4 \times 0.75}{0.4 \times 0.75 + 0.2 \times 0.25} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

【解答例その 2 強引に数えてしまう方法】 工場の従業員数を N とすれば、男性は $0.75N$ 人、女性は $0.25N$ 人であり、更に男性であって社宅に住んでいる人は $0.4 \times 0.75N$ 人、女性で社宅に住んでいる人は $0.2 \times 0.25N$ 人です。

従って社宅に住んでいる従業員は全部で $(0.4 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25)N$ 人なのでそのうち男性の割合は

$$\frac{0.4 \cdot 0.75N}{(0.4 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.25)N} = \frac{6}{7}$$

です。

□

11.2 級数の和を計算する問題

問題 11.2.1 A、B、C の 3 人がこの順番でさいころを振り続け、最初に 1 を出した人が勝ちであるというゲームをします。それぞれが勝つ確率を求めて下さい。

【解答例】 A さんは 1、4、7、 $\dots$ 回目に振る事になりますが、A さんが $1+3n$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $1+3n$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^A は

$$P_n^A = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} \cdot \frac{1}{6}$$

となり、A さんが勝つ確率 P^A は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^A$ であって

$$P^A = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^A = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{6^2}{6^3 - 5^3} = \frac{36}{91}$$

です。

次に B さんですが、B さんは 2、5、8、 $\dots$ 回目に振る事になりますが、B さんが $2+3n$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $2+3n$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^B は

$$P_n^B = \left(\frac{5}{6}\right)^{1+3n} \cdot \frac{1}{6}$$

となり、B さんが勝つ確率 P^B は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^B$ であって

$$P^B = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^B = \frac{5}{6^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{5}{6^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{6^3 - 5^3} = \frac{30}{91}$$

です。

最後に C さんですが、C さんは 3、6、9、 $\dots$ 回目に振る事になりますが、C さんが $3(n+1)$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $3(n+1)$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^C は

$$P_n^C = \left(\frac{5}{6}\right)^{2+3n} \cdot \frac{1}{6}$$

となり、C さんが勝つ確率 P^C は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^C$ であって

$$P^C = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^C = \frac{5^2}{6^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{5^2}{6^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{25}{6^3 - 5^3} = \frac{25}{91}$$

です。 □

演習問題 11.3 A、B、C の 3 人で優勝決定戦を行います。まず A と B が戦い、次に勝った方と C が戦います。以降勝った方と残りの 1 人が戦うことを繰り返し、最初に 2 連勝した人が優勝と定めます（巴戦）。

それぞれの戦いでどちらが勝つか、確率は全て $\frac{1}{2}$ であると仮定して、A、B、C それぞれの優勝する確率を求めて下さい。

A さんが優勝するに至るまでの勝者の系列は、最初の勝者が A さんである場合、

$$AA, \quad ACBAA, \quad ACBACBAA, \quad \dots$$

以外にはなく、また、最初の勝者が B さんである場合は

$$BCAA, \quad BCABCAA, \quad BCABCABCAA, \quad \dots$$

のみですから、

$$P[\text{最初に A が勝ち、A が優勝}] = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{2}{7}$$

$$P[\text{最初に B が勝ち、A が優勝}] = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} + \dots = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{1}{14}$$

$$P[A \text{ が優勝}] = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}$$

です。B さんが優勝する確率は A が優勝する確率と同じですから $\frac{5}{14}$ です。

C さんが優勝するに至るまでの勝者の系列は、最初の勝者が A さんである場合、

$$ACC, \quad ACBACC, \quad ACBACBACC, \quad \dots$$

以外にはなく、

$$P[\text{最初に A が勝ち、C が優勝}] = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{1}{7}$$

です。最初の勝者が B さんの場合も全く同様ですから

$$P[\text{最初に B が勝ち、C が優勝}] = \frac{1}{7}$$

$$P[\text{C が優勝}] = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

です。

□

11.3 漸化式を解く問題

問題 11.3.1 A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 2 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

【解答例】この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている事象を E_n としますと、

$$\begin{aligned} P_n &= P(E_n) \\ &= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap \overline{E_{n-1}}) \\ &= P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(E_n) + P(\overline{E_{n-1}})P_{\overline{E_{n-1}}}(E_n) \\ &= P_{n-1}P_{E_{n-1}}(E_n) + (1 - P_{n-1})P_{\overline{E_{n-1}}}(E_n) \\ &= P_{n-1}\frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} + (1 - P_{n-1})\frac{3}{{}_4C_2} \\ &= \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}) \\ P_n &= \frac{1}{6}P_{n-1} + \frac{1}{2} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

と云う漸化式が成り立っている事が分かります。 $P_1 = \frac{2}{3}$ ですからこの初期値の元で漸化式を解けば答えが求まります。この漸化式に対応した同次漸化式：

$$P_n - \frac{1}{6}P_{n-1} = 0$$

の一般解は $P_n = C \left(\frac{1}{6}\right)^n$ ですから (C は任意の定数)、元の漸化式 (*) の解の一つを見つけてやれば一般解が求まります。 P_j を含まない項が定数ですから、定数数列 $Q_n = k$ が非同次漸化式 (*) を満たすと仮定すれば

$$k = \frac{k}{6} + \frac{1}{2}, \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{3}{5}$$

であることが分かります。従って非同次漸化式 (*) の一般解は

$$P_n = \frac{C}{6^n} + \frac{3}{5}$$

です。これが初期値 $P_1 = \frac{2}{3}$ を満たす様に定数 C を求めると

$$\frac{2}{3} = \frac{C}{6} + \frac{3}{5}, \quad \text{従って} \quad C = \frac{2}{5}$$

が分かりますから結局求める確率 P_n は $P_n = \frac{2}{5 \cdot 6^n} + \frac{3}{5}$ となります。

□

演習問題 11.4 A の袋には白玉 1 個と黒玉 2 個が、B の袋には黒玉 3 個が入っており、それぞれの袋から同時に 1 つずつ取り出して入れ替える操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返したあとに A の袋に白玉が入っている確率 a_n を求めて下さい。

【解答例】この操作を n 回繰り返したあとに A の袋に白玉が入っている事象を E_n と置きます。

$$\begin{aligned} a_n &= P(E_n) \\ &= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap \overline{E_{n-1}}) \\ &= P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(E_n) + P(\overline{E_{n-1}})P_{\overline{E_{n-1}}}(E_n) \\ &= a_{n-1}\frac{2}{3} + (1 - a_{n-1})\frac{1}{3} \\ a_n &= \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3} \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

であり、 $a_1 = \frac{2}{3}$ ですから、この初期条件の下で上の漸化式を解けば良い事になります。

この漸化式 (*) が

$$a_n - w = \frac{1}{3}(a_{n-1} - w)$$

と変形出来ると仮定すると、 $\frac{2}{3}w = \frac{1}{3}$ 、すなわち $w = \frac{1}{2}$ です。

すると $a_n - \frac{1}{2}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であり、初項は

$$a_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

ですから

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} \frac{1}{3^{n-1}} \\ a_n &= \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られます。

□

11.4 確率の最大値

問題 11.4.1 1 が 3 回出るまでサイコロを振り続けるゲームをします。n 回振ったところで 3 回目の 1 が出る事象を E_n とします。

(1) $P(E_n)$ を求めて下さい。 (2) $P(E_n)$ が最大になる n を求めて下さい。

【解答例】 (1) $P(E_1) = P(E_2) = 0$ であり、 $n \geq 3$ のときは

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P(n-1 \text{ 回目までに } 1 \text{ が } 2 \text{ 回出て、} n \text{ 回目に } 1 \text{ が出る}) \\ &= {}_{n-1}C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1-2} \frac{1}{6} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)5^{n-3}}{2 \cdot 6^n} \end{aligned}$$

です。

(2)

$$\frac{P(E_{n+1})}{P(E_n)} = \frac{\frac{n(n-1)5^{n-2}}{2 \cdot 6^{n+1}}}{\frac{(n-1)(n-2)5^{n-3}}{2 \cdot 6^n}} = \frac{5n}{6(n-2)}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \frac{P(E_{n+1})}{P(E_n)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{5n}{6(n-2)} \geq 1 \\ 5n &\geq 6(n-2) \\ 12 &\geq n \end{aligned}$$

によれば $P(E_{12}) = P(E_{13})$ が最大です。

□

演習問題 11.5 サイコロを 100 回振るとき 1 が n 回出る事象を F_n とします。

(1) $P(F_n)$ を求めて下さい。 (2) $P(F_n)$ が最大となる n を求めて下さい。

(1) 明らかに $n > 100$ のとき $P(F_n) = 0$ であり、 $n \leq 100$ のときは

$$P(F_n) = {}_{100}C_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{100-n}$$

です。

(2) $n \leq 99$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{P(F_{n+1})}{P(F_n)} &= \frac{{}_{100}C_{n+1} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \left(\frac{5}{6}\right)^{100-n-1}}{{}_{100}C_n \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{100-n}} \\ &= \frac{\frac{100!}{(100-n-1)!(n+1)!} \frac{5^{100-n-1}}{6^{100}}}{{}_{100}C_n \frac{5^{100-n}}{6^{100}}} \\ &= \frac{(100-n)!n!5^{100-n-1}}{(100-n-1)!(n+1)!5^{100-n}} \\ &= \frac{100-n}{(n+1)5} \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} \frac{P(F_{n+1})}{P(F_n)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{100-n}{5(n+1)} \geq 1 \\ 100-n &\geq 5(n+1) \\ 95 &\geq 6n \\ 15.83\dots &\geq n \end{aligned}$$

が得られ、 $n = 16$ の時が最大であることが分かります。

□