11　色々な問題

11.1　条件／被条件の反転

全事象が互いに排反な２つの事象 A_1, A_2 に分解されていて、A_1, A_2 の確率や A_1, A_2 を条件とした時の B の確率がそれぞれ分かっているときに、条件／被条件の関係を逆転して、B を条件とした場合の A_1, A_2 の条件付き確率を求める事が出来ます。

条件付き確率、例えば $P_B(A_1)$ は $P(A_1 \cap B) = P_B(A_1)P(B)$ を満たしていますから、

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)} = \frac{P_{A_1}(B)P(A_1)}{P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2)}.$$

問題 **11.1.1 [** 教科書　問題 **12.7]** ある工場で２種類の機械 A、B を使って同じ製品を作っています。A と B の生産の割合は 3 : 2 であり、不良品の出る率はそれぞれ 4 %、5 %です。

(1) 1 個の製品を選んだとき、機械 A による製品である確率を求めて下さい。
(2) 1 個の不良品を選んだときそれが機械 A による製品である確率、つまり、不良品であると云う条件の下での機械 A による製品である確率を求めて下さい。

任意に 1 個取り出す試行において、それが機械 A による製品である事象を E_A、B による製品である事象を E_B、不良品である事象を E_F とします。

(1) $P(E_A) = \frac{3}{5}$.

(2) まず、

$$P(E_F) = P(E_F \cap E_A) + P(E_F \cap E_B) = P_{E_A}(E_F)P(E_A) + P_{E_B}(E_F)P(E_B)$$

ですが、

$$P(E_A) = \frac{3}{5},\quad P(E_B) = \frac{2}{5},\quad P_{E_A}(E_F) = \frac{4}{100},\quad P_{E_B}(E_F) = \frac{5}{100}$$

ですから

$$P(E_F) = \frac{4}{100}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{100}\cdot\frac{2}{5} = \frac{22}{500}$$

が分かります．従って

$$P_{E_F}(E_A) = \frac{P(E_A \cap E_F)}{P(E_F)} = \frac{\frac{4}{100}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{22}{500}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

です。 □

演習問題 **11.1** ある会社は、A、B、C 社から同じ製品を 2 : 3 : 5 の比率で購入しています。A、B、C 社の製品にはそれぞれ 2.5 %、1.5 %、1 %の割合で不良品が含まれていることが知られています。このとき次の確率を求めて下さい。

(1) これらの製品から任意に取り出した 1 個が不良品である確率。
(2) 取り出された不良品が A、B、C 社の製品であるそれぞれの確率。

演習問題 **11.2** ある工場では従業員の 75 %が男性で、男性のうち 40 %の人が社宅に住み、女性の中の 20 %の人が社宅に住んでいます。社宅に住んでいる従業員の中からくじで 1 名選ぶとき、その従業員が男性である確率を求めて下さい。

11.2　級数の和を計算する問題

問題 **11.2.1** A、B、C の 3 人がこの順番でさいころを振り続け、最初に 1 を出した人が勝ちであるというゲームをします。それぞれが勝つ確率を求めて下さい。

【解答例】　A さんは 1、4、7、・・・回目に振る事になりますが、A さんが $1 + 3n$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $1 + 3n$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^A は

$$P_n^A = \left(\frac{5}{6}\right)^{3n}\cdot\frac{1}{6}$$

となり、A さんが勝つ確率 P^A は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^A$ であって

$$P^A = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^A = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{6^2}{6^3-5^3} = \frac{36}{91}$$

です。

次に B さんですが、B さんは 2、5、8、・・・回目に振る事になりますが、B さんが $2 + 3n$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $2 + 3n$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^B は

$$P_n^B = \left(\frac{5}{6}\right)^{1+3n}\cdot\frac{1}{6}$$

となり、B さんが勝つ確率 P^B は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^B$ であって

$$P^B = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^B = \frac{5}{6^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{5}{6^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{6^3 - 5^3} = \frac{30}{91}$$

です。

最後に C さんですが、C さんは 3、6、9、・・・回目に振る事になりますが、C さんが $3(n+1)$ 回目に勝つ為にはそれ以前の全てのターンで 1 が出ずにいて $3(n+1)$ 回目に 1 が出る必要があります。従ってその確率 P_n^C は

$$P_n^C = \left(\frac{5}{6}\right)^{2+3n} \cdot \frac{1}{6}$$

となり、C さんが勝つ確率 P^C は $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^C$ であって

$$P^C = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^C = \frac{5^2}{6^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3n} = \frac{5^2}{6^3} \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{25}{6^3 - 5^3} = \frac{25}{91}$$

です。 □

演習問題 **11.3** A、B、C の 3 人で優勝決定戦を行います。まず A と B が戦い、次に勝った方と C が戦います。以降勝った方と残りの 1 人が戦うことを繰り返し、最初に 2 連勝した人が優勝と定めます（巴戦)。

それぞれの戦いでどちらが勝つか、確率は全て $\frac{1}{2}$ であると仮定して、A、B、C それぞれの優勝する確率を求めて下さい。

11.3　漸化式を解く問題

問題 **11.3.1** A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 2 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

【解答例】操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている事象を E_n としますと、

$$P_n = \frac{1}{6} P_{n-1} + \frac{1}{2} \quad \cdots (*)$$

と云う漸化式が成り立っている事が分かります。$P_1 = \frac{2}{3}$ ですからこの初期値の元で漸化式を解けば $P_n = \frac{2}{5 \cdot 6^n} + \frac{3}{5}$ となります。 □

演習問題 **11.4** A の袋には白玉 1 個と黒玉 2 個が、B の袋には黒玉 3 個が入っており、それぞれの袋から同時に 1 つずつ取り出して入れ替える操作を繰り返します。

この操作を n 回繰り返したあとに A の袋に白玉が入っている確率 a_n を求めて下さい。

11.4　確率の最大値

問題 **11.4.1** 1 が 3 回出るまでサイコロを振り続けるゲームをします。n 回振ったところで 3 回目の 1 が出る事象を E_n とします。

(1) $P(E_n)$ を求めて下さい。　(2) $P(E_n)$ が最大になる n を求めて下さい。

【解答例】(1) $P(E_1) = P(E_2) = 0$ であり、$n \geq 3$ のときは

$$P(E_n) = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1-2} \frac{1}{6} = \frac{(n-1)(n-2)5^{n-3}}{2 \cdot 6^n}.$$

(2)

$$\frac{P(E_{n+1})}{P(E_n)} = \frac{\frac{n(n-1)5^{n-2}}{2 \cdot 6^{n+1}}}{\frac{(n-1)(n-2)5^{n-3}}{2 \cdot 6^n}} = \frac{5n}{6(n-2)}$$

ですから、

$$\frac{P(E_{n+1})}{P(E_n)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5n}{6(n-2)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 12 \geq n$$

によれば $P(E_{12}) = P(E_{13})$ が最大です。 □

演習問題 **11.5** サイコロを 100 回振るとき 1 が n 回出る事象を F_n とします。

(1) $P(F_n)$ を求めて下さい。　(2) $P(F_n)$ が最大となる n を求めて下さい。