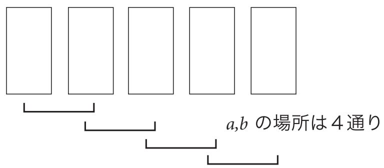
12　問題演習

12.1　確率の定義と性質　基本問題

演習問題 12.1 5 個の文字 a、b、c、d、e を 1 列にでたらめに並べるとき、a と b が隣り合う確率を求めて下さい。

まず並べた結果のうち a と b が隣り合っているものの数を数えます。



a と b をひとまとまりにして考えたとき、その場所は左端の 2 つから右端の 2 つまで合計 4 通りの可能性があります（右図）。

そしてそのそれぞれの場合について、a、b 以外のものの並び方は ${}_3\mathrm{P}_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通りの可能性があります。

それぞれの場合について、ひとまとまりにして考えた a、b の中でどちらが右でどちらが左か 2 通りの場合があります。

以上から、a と b が隣り合っているものは $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$ 通りある事が分かります。

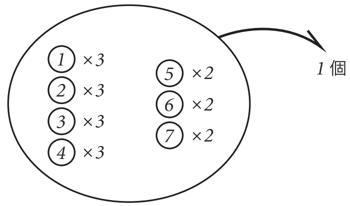
一方、並べ方全ての可能性は ${}_5\mathrm{P}_5 = 5!$ 通りあります。これらの計算から、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{5!} = \frac{2}{5}$$

であることが分かります。 □

演習問題 12.2 袋の中に 1 から 4 までの数字が記された玉が 3 個ずつと、5 から 7 までの数字が記された玉が 2 個ずつの計 18 個が入っています。この袋の中から 1 つの玉を取り出すとき、玉の数字が奇数である事象を A、1、2、3、4 のいずれかである事象を B とします。このとき、次の確率を求めて下さい。

(1) $P(\overline{A})$　(2) $P(A \cap B)$　(3) $P(A \cup B)$

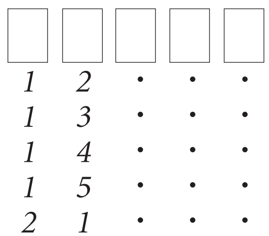


(1) 事象 $\overline{A}$ は偶数であることですから、偶数の個数を数えると 2 と 4 が 3 個ずつで 6 個、6 が 2 つで合計 8 個です。従って求める確率は $P(\overline{A}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ です。

(2) 事象 $A \cap B$ は結局 1 か 3 であることですから、1 と 3 で合計 6 個あるので求める確率は、$P(A \cap B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ です。

(3) 事象 $A \cup B$ は、要するに奇数であるか又は 1、2、3、4 のいずれかであるかですから、結局これは 6 でないと云うことです。6 は 2 個ですから 6 以外は 16 個あって、求める確率は $P(A \cup B) = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ です。 □

演習問題 12.3 1、2、3、4、5 と書かれた 5 枚のカードをでたらめに並べて、5 けたの数を作るとき、22000 以下になる確率を求めて下さい。



題意を満たすのは最初の 2 枚が順に 1・2、1・3、1・4、1・5、2・1 のいずれかの場合で、それぞれの場合においてそれ以外の 3 つのカードの並べ方には ${}_3\mathrm{P}_3 = 6$ 通りの場合があります。従って全て合計すると $5 \cdot 6 = 30$ 通りあることが分かります。

また、並べ方全ての可能性は ${}_5\mathrm{P}_5 = 5!$ 通りありますから、求める確率は

$$\frac{5 \cdot 6}{5!} = \frac{1}{4}$$

です。 □

演習問題 12.4 3 通の手紙とそれに対応した宛名を書いた封筒がある。いま、でたらめに手紙を 1 通ずつ封筒に入れるとき、少なくとも 1 通は正しく入れられる確率を求めて下さい。

3 種類の手紙および封筒があるのでそれを仮に A, B, C と名付ける事にします。手紙と封筒の全ての組み合わせは $3!$ 通りあります。

少なくとも 1 通が正しく入っているものを場合分けによって数えて行きましょう。

A が正しい組み合わせは、その他の封筒に残り 2 つの手紙を入れるので 2 通りの場合があります。

また、A が正しくない組み合わせの中で B が正しいものは 1 通りしかありません（A と C が入れ替わっている場合だけ）。

更に A, B が共に正しくない組み合わせの中で C は正しいと云うものも 1 通りしかありません。

以上から、少なくとも 1 通は正しく入れられている場合は 4 通りあって、求める確率は $\frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$ です。 □

演習問題 12.5 3 つのさいころを振るとき、出る目の最大値が 6 である確率を求めて下さい。

全て 5 以下の場合は 5^3 通りあります。この場合、出目の最大値は 5 以下です。さいころの目の結果は全部で 6^3 通りある中で全て 5 以下のもの以外には必ず 6 が入っており、この場合に限って出目の最大値は 6 です。

従って、求める確率は以下の通りです：

$$\frac{6^3 - 5^3}{6^3} = \frac{216 - 125}{216} = \frac{91}{216}.$$

□

演習問題 12.6 トランプ 52 枚をよく切って 2 枚を抜くとき、2 枚ともハートであるか、2 枚とも絵札（J,Q,K）である確率を求めて下さい。

2 枚ともハートである場合は ${}_{13}\mathrm{C}_2$ 通りあり、2 枚とも絵札の場合は ${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通りあります。しかし 2 枚ともハートの絵札である場合は上のどちらにも入っていますからその分だぶっています。2 枚ともハートの絵札である場合は ${}_{3}\mathrm{C}_2$ 通りありますから、結局、2 枚ともハートであるか又は 2 枚とも絵札である場合は

$${}_{13}\mathrm{C}_2 + {}_{12}\mathrm{C}_2 - {}_{3}\mathrm{C}_2$$

通りあります。

全ての場合は ${}_{52}\mathrm{C}_2$ 通りありますから、求める確率は以下の通りです：

$$\frac{{}_{13}\mathrm{C}_2 + {}_{12}\mathrm{C}_2 - {}_{3}\mathrm{C}_2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{13 \cdot 12 + 12 \cdot 11 - 3 \cdot 2}{52 \cdot 51} = \frac{47}{442}.$$ □

12.2　確率の定義と性質　応用問題

演習問題 12.7 2 つのさいころを振って出る目の数をそれぞれ r_1, r_2 とします。

(1) $r_1 = r_2$ となる確率を求めて下さい。
(2) $r_1 > r_2$ となる確率を求めて下さい。
(3) $r_1 \neq r_2$ で $\mathrm{Max}\{r_1, r_2\} = r$ となる事象を E_r とするとき、$P(E_j)\,(j = 1, \ldots, 6)$ を求めて下さい。

(1) 出る目の総数は 6^2 通りありますが、その中で 2 つのさいころの目が一致する場合は $1 = 1, 2 = 2, \ldots, 6 = 6$ の計 6 通りです。従って求める確率は $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ となります。

(2) $r_1 > r_2$ となる確率と $r_1 < r_2$ となる確率は等しい筈です。従ってこれを p とすれば、(1) から

$$1 = (r_1 > r_2 \text{ となる確率}) + (r_1 = r_2 \text{ となる確率}) + (r_1 < r_2 \text{ となる確率}) = 2p + \frac{1}{6}$$

となって $p = \frac{5}{12}$ が分かります。

(3) それぞれ数えてみましょう。まず E_1 ですが、このような場合は存在しません。従って $P(E_1) = 0$ です。

次に E_2 ですが、これは、$(r_1, r_2) = (1, 2), (2, 1)$ の 2 通りありますから確率は $P(E_2) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$ です。

次に E_3 ですが、これは、$(r_1, r_2) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ の 4 通りありますから確率は $P(E_2) = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$ です。

E_4 は $(1, 4), (2, 4), (3, 4)$ とこれを入れ替えた場合の合計 6 通りありますから確率は $P(E_4) = \frac{1}{6}$ です。

E_5 も同様に、$(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)$ とこれらを入れ替えたものの 8 通りあるので $P(E_5) = \frac{8}{6^2} = \frac{2}{9}$ です。

最後に E_6 ですが、$(1, 6), (2, 6), \ldots, (5, 6)$ の倍、10 通りあるので $P(E_6) = \frac{10}{6^2} = \frac{5}{18}$ です。 □

演習問題 12.8 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ のとき、次の確率を求めて下さい。
(1) $P(A\cup B)$　(2) $P(A\cap\overline{B})$　(3) $P(\overline{A}\cup B)$

(1) 加法定理から、

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

です。

(2) 同様に

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\\ \frac{1}{2}&=\frac{1}{4}+P(A\cap\overline{B})\end{aligned}$$

従って $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{4}$ です。

(3) これも同様に

$$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)$$

ですが、右辺第 3 項は (2) と同様な議論により

$$\begin{aligned}&=P(\overline{A})+P(B)-\{P(B)-P(A\cap B)\}\\ &=1-P(A)+P(A\cap B)\\ &=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\ &=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

と計算する事が出来ます。 □

演習問題 12.9 3 つの事象 A,B,C に対して次の等式が成り立つことを証明して下さい。

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

まず $A\cup B$ をひとまとまりに考えて加法定理から

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P(\{A\cup B\}\cap C)$$

ですが、右辺第 3 項は集合の演算として展開して

$$=P(A\cup B)+P(C)-P(\{A\cap C\}\cup\{B\cap C\})$$

となります。次いで右辺第 1、3 項を矢張り加法定理で変形すると

$$\begin{aligned}&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)\\ &\qquad -\{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\}\\ &=P(A)+P(B)+P(C)\\ &\qquad -P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

となって題意を得ます。 □

演習問題 12.10 1 から 100 までの整数の中から、1 つの数を任意に選び出したとき、その数が 2 の倍数または 3 の倍数または 5 の倍数である確率を求めて下さい。

選び出した数が 2、3、5 の倍数である事象をそれぞれ A,B,C とします。すると上の結果から、

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

ですから、後は右辺の各確率を計算してやれば OK です。1 から 100 までの中に、2 の倍数は 50 個、3 の倍数は 33 個、5 の倍数は 20 個あります。また、2 かつ 3 の倍数、即ち 6 の倍数は 16 個、3 かつ 5 の倍数、即ち 15 の倍数は 6 個、5 かつ 2 の倍数、即ち 10 の倍数は 10 個あります。また、最後に、2、3、5 の倍数である数は結局 30 の倍数ですが、これは 3 個あります。
以上から、求める確率は

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{50+33+20-16-6-10+3}{100}=\frac{74}{100}=\frac{37}{50}$$

です。 □

演習問題 12.11 $P(A)P(B) > \frac{1}{4}$ のとき、A, B は互いに排反ではないことを証明して下さい。

まず題意のケースでは $P(A) \neq 0$ であることに注意しておきます。
もしも排反なら、$1 - P(A) \geq P(B)$ ですが、このとき、

$$\begin{aligned} 1 - P(A) &\geq P(B) \\ \{1 - P(A)\}P(A) &\geq P(B)P(A) \\ &> \frac{1}{4} \\ 0 &> 1 - 4P(A) + 4P(A)^2 \\ &= \{1 - 2P(A)\}^2 \end{aligned}$$

となってしまいこれは矛盾です。従って A と B は排反ではあり得ません。 □

12.3　いろいろな確率　基本問題

演習問題 12.12 A 中学校、B 中学校では、それぞれ、全生徒の $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ の者が塾に通っているという。くじ引きで A 中学校から 15 人、B 中学校から 25 人の生徒を選び、この中から 1 人の生徒を任意に選ぶとき
(1) この生徒が A 中学校の生徒で、塾に通っている確率を求めて下さい。
(2) この生徒が塾に通っている確率を求めて下さい。

任意に選んだ生徒が A 中学校の生徒である事象を E_A、B 中学校の生徒である事象を E_B、塾に通っている事象を E_J とします。
分かっているのは

$$P(E_A) = \frac{15}{40}, \quad P(E_B) = \frac{25}{40}, \qquad P_{E_A}(E_J) = \frac{2}{3}, \quad P_{E_B}(E_J) = \frac{3}{5}$$

である事です。

(1) 求める確率は $P(E_A \cap E_J)$ ですが、積の法則から

$$P(E_A \cap E_J) = P(E_A)P_{E_A}(E_J) = \frac{15}{40} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$$

が分かります。

(2) 同様に

$$P(E_B \cap E_J) = P(E_B)P_{E_B}(E_J) = \frac{25}{40} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{8}$$

ですので、(1) の結果と合わせて

$$P(E_J) = P(E_A \cap E_J) + P(E_B \cap E_J) = \frac{5}{8}$$

であることが分かります。 □

演習問題 12.13 赤玉 4 個と白玉 2 個が入っている袋の中から、1 個ずつ 5 回玉を復元抽出するとき、次の事象の起こる確率を求めて下さい。
(1) 赤玉が出ない。　(2) 赤玉が 1 回出る。　(3) 赤玉が 2 回以上出る。

(1) 赤玉が出ない場合、5 回全て白玉が出るわけであって、白玉には 2 個のヴァリエーションがあるので、赤が出なかった場合の場合の数は 2^5 通りあります。一方、全ての場合は 6^5 通りあるわけですから、求める確率は $\frac{2^5}{6^5} = \frac{1}{3^5}$ です。

(2) 赤玉が 1 回出る場合が何通りあるか数えます。まず赤玉が何回目に出るかで分ければ 5 通りあるわけですが、そのそれぞれについて出た赤玉がどの赤玉なのか 4 通りがあります。残りの白玉のヴァリエーションも 4 つについて 2 通りずつあるので合計で $5 \cdot 4 \cdot 2^4$ 通りあることが分かります。従って求める確率は $\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^4}{6^5} = \frac{10}{3^5}$ です。

(3) 赤玉が 2 回以上出る事象の余事象は赤玉が 0、1 回出ると云う事象ですので、(1)、(2) の結果から、求める確率は $1 - \frac{1}{3^5} - \frac{10}{3^5} = \frac{232}{3^5}$ です。 □

演習問題 12.14 6 本のくじの中に当たりくじが 2 本ある。A、B 2 人が順に 2 本ずつ引くとき、次の確率を求めて下さい。ただし非復元抽出とします。
(1) A も B も当たる。　(2) A がはずれ、B が当たる。　(3) B が当たる。

(1) くじの出方の総数は、${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2$ 通りあります。そのうち A も B も当たる場合は、当たりの 2 つのうちどちらが A に行くかによって 2 通りあって、更にそのそれぞれの場合についてはずれのヴァリエーションは $4 \cdot 3$ 通りあります。

以上によって A も B も当たる場合は $2 \cdot 4 \cdot 3$ 通りある事になります。従って求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{4}{15}$$

です。

(2) A が外れ B が当たる場合のヴァリエーションは、まず A が引くはずれ 2 枚のヴァリエーションが ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあって、そのそれぞれに対して B の方のヴァリエーションがあります。

B が当たり 2 枚を引く場合が 1 通りあり、また B が当たりを 1 枚だけ引く場合はどの当たりを引くかで 2 通りあって、更にそのそれぞれに対してもう 1 枚のはずれのヴァリエーションで 2 通り（4 枚あったはずれのうち 2 枚は既に A が引いていて残りは 2 枚）ある事が分かります。

従って A が外れて B が当たる場合は

$${}_4\mathrm{C}_2(1 + 2 \cdot 2) = 5 \cdot {}_4\mathrm{C}_2$$

通りあります。従って求める確率は

$$\frac{5 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{3}$$

(3) B が当たる場合は A が当たっている場合と A が外れている場合に分ける事が出来、これらは互いに排反です。従って、(1)、(2) の結果から、求める確率は $\frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ です。 □

演習問題 12.15 赤玉 2 個、白玉 6 個の入っている袋と、赤玉 3 個、白玉 9 個の入っている袋からそれぞれ 2 個ずつの玉を同時に取り出すとき、赤玉が合計 3 個出る確率を求めて下さい。

第 1 の袋を A、第 2 の袋を B と呼ぶ事にします。赤玉 3 個の出自のヴァリエーションは A から 1 個、B から 2 個の場合と逆の場合があります。

そこで、A から n 個の赤玉を引く事象を A_n、B から n 個の赤玉を引く事象を B_n として各事象の確率を求めておきましょう。

まず A_1 の場合は、赤玉の種類で 2 種類あって、もう 1 個の白玉の種類で 6 通りあります。全ての可能性は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りありますから結局 $P(A_1) = \frac{2 \cdot 6}{{}_8\mathrm{C}_2}$ です。

同様に数えて行けば B_2 は、赤のヴァリエーションで ${}_3\mathrm{C}_2$ ありますから $P(B_2) = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}$ です。

$P(A_2), P(B_1)$ も同様に計算して、求める確率 p は、

$$\begin{aligned} p &= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \\ &= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1) \\ &= \frac{2 \cdot 6}{{}_8\mathrm{C}_2} \cdot \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2} + \frac{1}{{}_8\mathrm{C}_2} \cdot \frac{3 \cdot 9}{{}_{12}\mathrm{C}_2} \\ &= \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} + \frac{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} \\ &= \frac{7 \cdot 3^2 \cdot 2^2}{8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 11} \\ &= \frac{3}{88} \end{aligned}$$

となる事が分かります。 □

演習問題 12.16 1 つの箱に赤玉 4 個と白玉 5 個が入っている。A、B 2 人が A から始めて交互に箱の中から玉を 1 つ取り出し、先に白玉を取り出した者を勝ちとします。A、B それぞれの勝つ確率を求めて下さい。ただし、非復元抽出とします。

A が勝つ場合は、出玉が順に（赤を R、白を W で表します)、

$$W, \quad RRW, \quad RRRRW$$

である場合があり、それぞれの確率を求めれば

$$P(W) = \frac{5}{9}, \quad P(RRW) = \frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7}, \quad P(RRRRW) = \frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{5}{5}$$

なので、A が勝つ確率は

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} &= \frac{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \frac{5 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 1}{9 \cdot 2 \cdot 7} \\ &= \frac{86}{126} \\ &= \frac{43}{63} \end{aligned}$$

となります。

また、このゲームはどちらか一方が必ず勝つので B の勝つ確率は $1-\frac{43}{63}=\frac{20}{63}$ になります。

12.4　いろいろな確率　応用問題

演習問題 12.17 2 つの事象 A, B について、A と B が互いに独立であれば、A と $\overline{B}$ も互いに独立であることを証明して下さい。

A, B の独立性から

$$P(A)P(\overline{B})=P(A)\{1-P(B)\}=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ですが、

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)$$

なので、

$$P(A)P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B})$$

となって題意を得ます。 □

演習問題 12.18 A さんが B さんには見えないように大小 2 つのさいころを振り、B さんが目の和が偶数であるかどうか当てるゲームをします。

(1) さいころの目の和が偶数である事象を U、大きいさいころの目が 3 以下である事象を V、小さいさいころの目が 3 以下である事象を W とするとき、U と V、U と W は互いに独立であることを証明して下さい。

(2) A さんは、(1) で示したことから、それぞれの目が 3 以下であるかどうかを教えても B さんには有利にならないと考えました。この考えは正しいでしょうか。

(1) 各事象の確率を計算しておきましょう。

まず U の場合は大きいさいころの目が奇数の場合が 3 通りあって、そのとき小さいさいころの目が奇数なら良いのでそれぞれについて 3 通り、合計 9 通りあります。一方大きいさいころの目が偶数の場合も 3 通りあって、そのとき小さいさいころの目が偶数なら良いわけですからこちらもそれぞれ 3 通り、結局合計 9 通りあります。

これらを足し合わせて、事象 U の場合の数は 18 通りですから、$P(U)=\frac{18}{6^2}=\frac{1}{2}$ であることが分かります。

また、$P(V), P(W)$ は明らかに $\frac{1}{2}$ です。

次に積事象ですが、$U\cap V$ は、大きなさいころの目が 1、2、3 それぞれの場合について、小さいさいころの目が奇数、偶数、奇数なら良いわけですから、それぞれ 3 通り合計 9 通りあります。従って、$P(U\cap V)=\frac{9}{6^2}=\frac{1}{4}$ になります。

事情は $U\cap W$ でも同じですから、こちらも確率は $P(U\cap W)=\frac{9}{6^2}=\frac{1}{4}$ です。

以上から $P(U\cap V)=P(U)P(V), P(U\cap W)=P(U)P(W)$ が成り立っているので題意は示されました。

(2) 事象 $U\cap V\cap W$ を考えると、これは大小のさいころの目が順に $(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)$ である事になりますからその確率は $\frac{5}{6^2}$ です。

しかし、$P(V\cap W)=\frac{9}{6^2}$ から、

$$P(U)P(V\cap W)=\frac{\frac{9}{2}}{6^2}\neq\frac{5}{6^2}=P(U\cap V\cap W)$$

であって、U と $V\cap W$ は互いに独立ではありません。従って、A さんの考えは正しくありません。大小どちらか一方の目が 3 以下であるかどうか知るだけなら有利になりませんが、両方の情報を知ってしまうと有利になってしまいます。 □

演習問題 12.19 数直線上を動く点 P が原点の位置にあります。1 個のさいころを振って、奇数の目が出たときには P を正の向きに 1 だけ進め、偶数の目が出たときには P を負の向きに 1 だけ進めます。さいころを 6 回振ったとき、P の座標が 2 である確率を求めて下さい。

6 回振る中で奇数が 4 回、偶数が 2 回出ればその順番に関わらず点 P の座標は 2 になります。従ってその確率は

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

です。

演習問題 12.20 10 本のくじの中に当たりくじが 3 本あります。A、B、C の 3 人がこの順番で誰かが当たるまで 1 本ずつ引いて行きます。

(1) 非復元抽出する場合、それぞれの当たる確率を求めて下さい。
(2) 復元抽出する場合、それぞれの当たる確率を求めて下さい。

(1) A が当たる場合は、当たりを S、はずれを F と書いて、出たくじが順に

$$S, \quad FFFS, \quad FFFFFFS$$

である場合です。従ってその確率は

$$\begin{aligned}&\frac{3}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\\ &=\frac{3}{10}+\frac{5}{10\cdot 4}+\frac{1}{10\cdot 4}=\frac{9}{20}\end{aligned}$$

になります。

B が当たる場合は同様に書いて

$$FS, \quad FFFFS, \quad FFFFFFFS$$

である場合です。従ってその確率は

$$\begin{aligned}&\frac{7\cdot 3}{10\cdot 9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\\ &=\frac{7}{10\cdot 3}+\frac{5}{10\cdot 3\cdot 2}+\frac{1}{10\cdot 3\cdot 4}=\frac{13}{40}\end{aligned}$$

になります。

C が当たる場合も同様に書いて

$$FFS, \quad FFFFFS$$

である場合です。従ってその確率は

$$\frac{7\cdot 6\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{10\cdot 4}+\frac{2}{10\cdot 4}=\frac{9}{40}$$

になります。

(2) A が当たるのは、出たくじが順に

$$S, \quad FFFS, \quad FFFFFFS, \quad \cdots$$

である場合ですから、その確率はそれぞれの場合の確率を足して

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^3\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^6\frac{3}{10}+\cdots&=\frac{\frac{3}{10}}{1-\left(\frac{7}{10}\right)^3}\\ &=\frac{300}{10^3-7^3}\\ &=\frac{100}{219}\end{aligned}$$

となります。

B が当たるのは、同様に出たくじが順に

$$FS, \quad FFFFS, \quad FFFFFFFS, \quad \cdots$$

である場合ですから、その確率はそれぞれの場合の確率を足して

$$\begin{aligned}\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^4\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^7\frac{3}{10}+\cdots&=\frac{\frac{3\cdot 7}{10^2}}{1-\left(\frac{7}{10}\right)^3}\\ &=\frac{3\cdot 70}{10^3-7^3}\\ &=\frac{70}{219}\end{aligned}$$

となります。

C が当たるのは、同様に出たくじが順に

$$FFS, \quad FFFFFS, \quad FFFFFFFFS, \quad \cdots$$

である場合ですから、その確率はそれぞれの場合の確率を足して

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{10}\right)^2\cdot\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^5\frac{3}{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^8\frac{3}{10}+\cdots&=\frac{\frac{3\cdot 7^2}{10^3}}{1-\left(\frac{7}{10}\right)^3}\\ &=\frac{3\cdot 7^2}{10^3-7^3}\\ &=\frac{49}{219}\end{aligned}$$

となります。 □

演習問題 12.21 ある国では、男性 1000 人に 1 人の割合で、ある病気に感染していると言います。検査薬によって、感染していれば 0.98 の確率で陽性反応が出ます。ただし、感染していない場合にも、0.01 の確率で陽性の反応が出ると言います。さて、いま 1 人の男性に陽性反応が出たとして、この男性が感染者である確率はどれだけでしょうか。

まず各事象に名前をつけましょう。
その病気に感染している事象を K、陽性反応が出る事象を Y とします。
分かっていることは

$$P(K) = \frac{1}{1000}, \quad P_K(Y) = 0.98, \quad P_{\overline{K}}(Y) = 0.01$$

です。
このとき、

$$\begin{aligned} P_Y(K) &= \frac{P(K \cap Y)}{P(Y)} \\ &= \frac{P(K \cap Y)}{P(Y \cap K) + P(Y \cap \overline{K})} \\ &= \frac{P_K(Y)P(K)}{P_K(Y)P(K) + P_{\overline{K}}(Y)P(\overline{K})} \\ &= \frac{0.98 \cdot \frac{1}{1000}}{0.98 \cdot \frac{1}{1000} + 0.01 \cdot \frac{999}{1000}} \\ &= \frac{98}{98 + 999} \\ &= \frac{98}{1097} \end{aligned}$$

となります。 □

12.5 大学入試問題から

演習問題 12.22 [2007 神戸大] n を 3 以上の整数とする。このとき、次の問に答えよ。
(1) さいころを n 回投げたとき、出た目の数がすべて 1 になる確率を求めよ。
(2) さいころを n 回投げたとき、出た目の数が 1 と 2 の 2 種類になる確率を求めよ。
(3) さいころを n 回投げたとき、出た目の数が 3 種類になる確率を求めよ。

(1) $\frac{1}{6^n}$.

(2) 全ての出目は 6^n 通りあり、そのうち $1, 2$ のみで出来ているものは 2^n 通りです。しかしこれは 1 のみ、あるいは 2 のみで出来ている合計２通りも含んでいますから、$1, 2$ の２種類で出来ているものは $2^n - 2$ 通りあり、求める確率は $\frac{2^n-2}{6^n}$ です。

(3) 全ての出目は 6^n 通りあります。a, b, c の３種類の目を固定したとき、a, b のみ 2^n 通り、b, c のみ 2^n 通り、c, a のみ 2^n 通りをすべて引き、これでは a のみの場合、b のみの場合、c のみの場合をそれぞれ 2 回ずつ引いているので、引きすぎた分を３加えれば、ちょうど a, b, c ３種類の目が出る場合は

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

通りあります。あとは a, b, c の選び方で ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りのヴァリエーションがありますから、求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_3 \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{6^n} = 10 \cdot \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{6^{n-1}}$$

となります。 □

演習問題 12.23 [2013 東京工大] 6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

a, b, c, d の異なる４種類の目を固定して考えます。この４種類の選び方には ${}_6\mathrm{C}_4 = 15$ 通りあります。

ちょうど４種類出る出方には、$aaabcd$ の型と、$aabbcd$ の型と２種類ありますから、それぞれ数えていきます。

【$aaabcd$ 型】まず３つ出る目の選び方が 4 通りあり、それが出るサイコロの選び方で ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りあります。また、同じ３つ以外がどのサイコロで出るかについて $3\cdot 2\cdot 1$ 通りありますから、これを合わせて、この型は

$$4\cdot{}_6\mathrm{C}_3\cdot 6=6\cdot 5\cdot 4^2$$

通りあります。

【$aabbcd$ 型】この型は２つ出る目（２種類）の選び方で ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあり、２つ出る目以外の１つしか出ない２つの目がどのサイコロかで ${}_6\mathrm{C}_2$ 通り、残りの４つのサイコロを２つずつに分ける方法で 3 通りあります。また、２つ出る２種類の入れ替えで２通り、１つ出る２種類の入れ替えで２通りありますから、結局、

$${}_4\mathrm{C}_2{}_6\mathrm{C}_2\cdot 3\cdot 2\cdot 2=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3^2$$

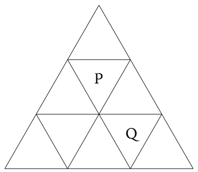
通りあります。

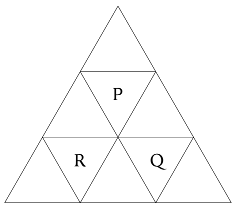
以上から、求める確率は

$$15\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4(4+9)}{6^6}=\frac{5^2\cdot 4\cdot 3\cdot 13}{6^5}=\frac{5^2\cdot 13}{6^3\cdot 3}=\frac{325}{648}$$

です。 □

演習問題 12.24 [2012 東京大] 図のように、正三角形を９つの部屋に辺で区切り、部屋 P,Q を定める。１つの玉が部屋 P を出発し、1 秒ごとに、そのままその部屋にとどまることなく、辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。玉が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。





図のように部屋 R を定めれば、n 秒後に玉のある部屋は、n が奇数であれば $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ 以外、n が偶数であれば $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ のいずれかです。

$2n$ 秒後に部屋 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ にある確率をそれぞれ p_n,q_n,r_n と置けば、$p_n+q_n+r_n=1$ であって、また対称性から $q_n=r_n$ が成り立っています。

またこれらの確率は漸化式：

$$p_{n+1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)p_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}r_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$$

を満たすので、$p_n=1-2q_n$ でしたから

$$\begin{aligned}1-2q_{n+1}&=\frac{2}{3}(1-2q_n)+\frac{1}{3}q_n\\&=\frac{2}{3}-q_n\\q_{n+1}&=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

が得られます（$q_0=0$）。

ここで

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

に注意すれば、辺々引いて

$$q_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{3}\right)$$

が得られ、数列 $\{q_n-\frac{1}{3}\}$ は初項 $-\frac{1}{3}$、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることが分かります。従って

$$\begin{aligned}q_n-\frac{1}{3}&=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\q_n&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^n}\end{aligned}$$

が得られます。従って求める確率は以下の通りです：

$$\begin{cases}0 & n\text{ が奇数}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}^n} & n\text{ が偶数}\end{cases}$$

□

演習問題 12.25 [2014 一橋大] 数直線上の点 P を次の規則で移動させる。一枚の硬貨を投げて、表が出れば P を $+1$ だけ移動させ、裏が出れば P を原点に対して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし、硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ。

(3)* $n \geq 3$ のとき、$a_n = n-3$ となる確率を n を用いて表せ。

(1) 表を U、裏を D で表せば、3 回までの結果と a_3 は以下の通りです：

結果	UUU	UUD	UDU	UDD	DUU	DUD	DDU	DDD
a_3	4	-2	0	1	2	-1	1	0

従って

$$P[a_3 = 0] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

です。

(2)

$$P[a_4 = 1] = P[a_3 = 0, a_4 = 1] + P[a_3 = -1, a_4 = 1] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

ここで手が止まってしまうかも知れません。ここを乗り越えられるかどうかが鍵だと思われます。$P[a_n = 2-n]$ をどう処理するか、全体を見渡すことと気付きが必要でしょうか。これは一橋の文系の問題ですが、前問の東大の問題の方が楽なように感じます。

(3) $p_n = P[a_n = n-3]$ とします。

$$P[a_{n+1} = n-2] = P[a_n = n-3, a_{n+1} = n-2] + P[a_n = 2-n, a_{n+1} = n-2]$$
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}P[a_n = 2-n]$$

ですが、

$$\begin{aligned} P[a_n = 2-n] &= P[a_{n-1} = 1-n, a_n = 2-n] + P[a_{n-1} = n-2, a_n = 2-n] \\ &= P[a_{n-1} = 1-n]\frac{1}{2} + P[a_{n-1} = n-2]\frac{1}{2} \end{aligned}$$

において、まず $a_{n-1} = -(n-1)$ となることはあり得ないので $P[a_{n-1} = 1-n] = 0$ であり、また、$a_{n-1} = n-2$ となるためには、最初の 1 回目に裏が出て、その後全て表が出る場合以外にないため、

$$P[a_{n-1} = n-2] = \frac{1}{2^{n-1}}$$

であり、従って

$$\begin{aligned} P[a_n = 2-n] &= P[a_{n-1} = 1-n]\frac{1}{2} + P[a_{n-1} = n-2]\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

であることが分かります。

そうすると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n+1}p_{n+1} &= 2^n p_n + 1 \end{aligned}$$

であり、$q_n = 2^n p_n$ と置けば

$$q_{n+1} - q_n = 1$$

が得られます。これを繰り返し使えば

$$\begin{aligned} (q_n - q_{n-1}) + \cdots + (q_4 - q_3) &= n-3 \\ q_n - q_3 &= n-3 \end{aligned}$$

となり、$q_3 = 2^3 p_3 = 8\cdot\frac{1}{4} = 2$ から

$$\begin{aligned} q_n &= n-1 \\ 2^n p_n &= n-1 \\ p_n &= \frac{n-1}{2^n} \end{aligned}$$

が得られます。これが求める確率です。 □