13　確率変数の分布・期待値

13.1　確率変数とその分布

その結果が有限個の同様に確からしい根元事象から成り立っているようなある試行の下で、試行の結果に応じて一つの実数が定まる状況を考えます。

例えばさいころを 1 個、1 回振ると云う試行において、『出た目を 4 で割った余り』と云うものを考える事が出来ます。これを仮に文字 X で表す事にしましょう。

X は従ってどの根元事象が起こったかによってその値が定まりますから、『根元事象を食べて実数を吐き出す関数』と考える事も出来ますが、ここではもう少しアバウトに、ランダムに値をとるものだと理解しておけば十分です。

現実に 1 回試行を行ってしまえばその値は具体的に与えられる事にはなりますが、それはたまたまそのような結果が出たと言うだけの事であってそれはもう『偶然』としか言い様がありませんから、試行の全ての結果を確率と云う形で全体として認識しようとする事に興味があります。

例えば今考えている X は、出目が 4 のときに 0 と云う値をとり、出目が 1、5 ならば 1、出目が 2、6 ならば 2、出目が 3 ならば 3 と云う値をとるわけですから、$P[X=0]=\frac{1}{6}$ であり、$P[X=1]=\frac{1}{3}$、$P[X=2]=\frac{1}{3}$、$P[X=3]=\frac{1}{6}$、であることが分かります。

この様に、ある試行の結果に応じて値が定まるような “関数” の事を確率変数（random variable）と言います。

そしてこの確率変数が取り得る全ての値を書き出し、その値をとる確率と共に表としてまとめたものをこの確率変数の（確率）分布表（table of distribution）と言います。必要事項がきちんと書かれていれば書式は任意ですが、まあ、下のように書けば十分でしょう：

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

当然ですが下段の全ての確率を足すと 1 になっていなければなりません。

演習問題 13.1 次の確率変数 X, Y の確率分布表をつくって下さい。

(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。

(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

【解答例】(1) 2 枚の硬貨が表を向くか裏を向くかは互いに独立なので

$$P[X=0]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\quad P[X=2]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ですし、表が 1 枚である場合は表・裏と裏・表の 2 通りあってこれらは排反ですから

$$P[X=1]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

となります。従って分布表は以下の通り：

x	0	1	2
$P[X=x]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

(2) 出目の和は 2 から 12 までの可能性があり、それぞれ出目は

$$\begin{aligned}
Y=2 &: (1,1)\\
Y=3 &: (1,2),(2,1)\\
Y=4 &: (1,3),(2,2),(3,1)\\
Y=5 &: (1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\\
Y=6 &: (1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\\
Y=7 &: (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\\
Y=8 &: (2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\\
Y=9 &: (3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\\
Y=10 &: (4,6),(5,5),(6,4)\\
Y=11 &: (5,6),(6,5)\\
Y=12 &: (6,6)
\end{aligned}$$

の可能性がありますから、分布表は以下の通り：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y=n]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

□

演習問題 13.2 [教科書 問題 13.1] 白玉 3 個、赤玉 2 個の入った袋から次の方法で玉を取り出すとき、それぞれの確率変数 X, Y の確率分布表を作って下さい。

(1) 3 個の玉を同時に取り出すとき、白玉の個数を X とします。

(2) 1 個の玉を取り出し、それを袋に戻してまた 1 個の玉を取り出すことを 3 回繰り返すとき、白玉の出る回数を Y とします。

【解答例】(1) 合計 5 個の玉が入った袋から 3 個取り出した結果の総数は ${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$ であり、そのうち白玉が 0 個の場合はなく：

$$P[X = 0] = 0$$

白玉が 1 個の場合は白玉のヴァリエーションが 3 通り、そのそれぞれについて赤玉のヴァリエーションが 1 通りずつありますから

$$P[X = 1] = \frac{3}{10}$$

です。

白玉が 2 個の場合は、白玉のヴァリエーションで ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り、そのそれぞれに対して赤玉のヴァリエーションが 2 通りありますから

$$P[X = 2] = \frac{6}{10}$$

です。

白玉が 3 個の場合は、全ての白玉が出る場合ですから 1 通りしかありません：

$$P[X = 3] = \frac{1}{10}.$$

以上から確率分布表は

j	0	1	2	3
$P[X = j]$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

となります。

(2) この場合は結果の総数は 5^3 あり、そのうち白玉が 0 個のものは、どの赤玉が出たかによって 2^3 通りのヴァリエーションがありますから

$$P[Y = 0] = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

白玉が 1 個のものは、何回目に白玉が出たかによって 3 通りのヴァリエーションがあり、そのそれぞれについてどの白玉が出たかのヴァリエーションが 3 通りずつ、どの赤玉が出たかのヴァリエーションが 2^2 ずつありますから

$$P[Y = 1] = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2^2}{5^3} = \frac{36}{125}$$

です。

白玉が 2 個の場合は、何回目に白玉が出たかによって ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通りのヴァリエーションがあり、そのそれぞれについてどの白玉が出たかのヴァリエーションが 3^2 通りずつ、どの赤玉が出たかで 2 通りありますから

$$P[Y = 2] = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 2}{5^3} = \frac{54}{125}$$

です。

白玉が 3 個の場合は、どの白玉かのヴァリエーションで 3^3 ありますから、

$$P[Y = 3] = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

です。

以上から確率分布表は

j	0	1	2	3
$P[Y = j]$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

となります。 □

13.2　期待値

先の例に挙げた確率変数 X の分布表は

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

でしたが、十分多くの試行（N 回）を繰り返せば、X の値が 0 になるのは N 回中 $\frac{1}{6}\cdot N$ 回であろうと考えられます。つまり 0 が $\frac{1}{6}\cdot N$ 個結果としてあると考えられます。

また、同様に考えれば、$X=1$ となるのは $\frac{1}{3}\cdot N$ 回、$X=2$ となるのも同じ、$X=3$ となるのは $\frac{1}{6}\cdot N$ 回ですから、結果を全て足して個数で割ったものは

$$\frac{0\cdot\frac{1}{6}\cdot N+1\cdot\frac{1}{3}\cdot N+2\cdot\frac{1}{3}\cdot N+3\cdot\frac{1}{6}\cdot N}{N}=\frac{3}{2}$$

となりますからこれが X の平均値であると考えられますが、左辺をよく見ると N が全てキャンセルして、これは値とその値をとる確率の積を全て足しているのと同じである事が分かります：

$$0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

定義 13.2.1 確率変数 X が取り得る値とその値をとる確率の積を全て足したものをその確率変数の期待値（expected value）あるいは平均値（mean）と言い、記号 $E[X]$ で表します：

$$E[X]=\sum_j x_jP[X=x_j].$$

演習問題 13.3 次の確率変数 X,Y の平均値を求めて下さい。

(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。

(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

【解答例】先に作成した分布表を流用しましょう。

(1) 分布表は

x	0	1	2
$P[X=x]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

でしたから、

$$E[X]=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1$$

となります。

(2) 分布表は

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P[Y=n]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

でしたから、

$$\begin{aligned}E[Y]&=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}\\&\quad+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}\\&=\frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36}\\&=7\end{aligned}$$

が分かります。 □

13.2.1　期待値の線形性

２つの確率変数 X,Y は同じランダムネスに支配されている確率変数、つまり、ある１つの試行の結果によってそれぞれ定まる確率変数であって、

$$P[X=x_j,\ Y=y_k]=P_{j,k}\quad(1\le j\le n\quad 1\le k\le m)$$

であるとします。このとき、それぞれ

$$P[X=x_j]=P[\{X=x_j,Y=y_1\},\dots,\{X=x_j,Y=y_m\}]=\sum_{k=1}^{m}P_{j,k}$$

$$P[Y=y_k]=P[\{X=x_1,Y=y_k\},\dots,\{X=x_n,Y=y_k\}]=\sum_{j=1}^{n}P_{j,k}$$

となっています。すると

$$\begin{aligned}E[X+Y]&=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_k)p_{j,k}\\&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}x_jp_{j,k}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}y_kp_{j,k}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{k=1}^{m} p_{j,k} \right) + \sum_{k=1}^{m} y_k \left(\sum_{j=1}^{n} p_{j,k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j P[X = x_j] + \sum_{k=1}^{m} y_k P[Y = y_k] \\
&= E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

が成り立ちます。

例えば A、B **2** つのサイコロを同時に投げる試行において、A サイコロの出目 D_1 と B サイコロの出目 D_2 は、『**2** つのサイコロを投げる』という共通の試行の結果によって値が定まる確率変数であって、

$$E[D_1 + D_2] = E[D_1] + E[D_2]$$

が成り立ちます。従って先の演習問題の (2) の確率変数 Y は、**2** つのサイコロを区別すれば、$Y = D_1 + D_2$ であって、

$$E[Y] = E[D_1] + E[D_2] = \frac{1 + \cdots + 6}{6} + \frac{1 + \cdots + 6}{6} = 7$$

とも計算されます。わざわざ $D_1 + D_2$ の分布表を作らなくて済むのでこちらの方が楽に計算できます。

また、明らかに

$$E[kX] = kE[X]$$

も成り立っています：

事実 13.2.2 $v, w \in \mathbb{R}$

$$E[vX + wY] = vE[X] + wE[Y]$$

13.3 問題演習

演習問題 13.4 [教科書　問題 13.2] 1 枚、2 枚および 3 枚の硬貨を投げるとき、表の出る枚数をそれぞれ X, Y, Z とし、それらの確率分布表と平均値を求めて下さい。

【1 枚の場合】

$$P[X = 0] = \frac{1}{2}, \quad P[X = 1] = \frac{1}{2}$$

ですから確率分布表は

n	0	1
$P[X = n]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

であり、

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

です。

【2 枚の場合】

$$P[Y = 0] = \frac{1}{4}, \quad P[Y = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}, \quad P[Y = 2] = \frac{1}{4}$$

ですから確率分布表は

j	0	1	2
$P[Y = j]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

であり、平均値は

$$E[Y] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

です。

【3 枚の場合】

$$P[Z = 0] = \frac{1}{8}, \quad P[Z = 1] = {}_3\mathrm{C}_1 \frac{1}{8}, \quad P[Z = 2] = {}_3\mathrm{C}_2 \frac{1}{8}, \quad P[Z = 3] = \frac{1}{8}$$

ですから

j	0	1	2	3
$P[Z = j]$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

であって

$$E[Z] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

です。 □

演習問題 13.5 白玉４個と赤玉２個が入った袋があります。そこから球を非復元抽出で１個ずつ取り出して行き、赤玉が出たらそこで取り出すのを止めるものとします。取り出された白玉の個数の期待値を求めてください。

赤玉が出るまでに取り出された白玉の個数を表す確率変数を N とします。また、赤玉を R、白玉を W で表し、１回目からの特定の球の出方の事象を

$$\{WWR\} = \{ \text{１回目白、２回目白、３回目赤} \}$$

などと表すことにします。

$$P[N=0] = P[W] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P[N=1] = P[WR] = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$
$$P[N=2] = P[WWR] = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{3}{15}$$
$$P[N=3] = P[WWWR] = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$
$$P[N=4] = P[WWWWR] = \frac{4}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

ですから期待値は

$$E[N] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{3}{15} + 3 \cdot \frac{2}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

です。 □

演習問題 13.6 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、出る裏表の枚数に応じて、(表の枚数) $\times 100$ 円を受け取り、(裏の枚数)$^2 \times 30$ 円を支払わなければならないものとします。このゲームで得られる金額の期待値を求めてください。

$$P[\text{表 3 枚、裏 0 枚}] = \frac{1}{8}$$
$$P[\text{表 2 枚、裏 1 枚}] = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{8} = \frac{3}{8}$$
$$P[\text{表 1 枚、裏 2 枚}] = \frac{3}{8}$$
$$P[\text{表 0 枚、裏 3 枚}] = \frac{1}{8}$$

ですから、期待値 E は

$$E = (300-0)\frac{1}{8} + (200-30)\frac{3}{8} + (100 - 4 \cdot 30)\frac{3}{8} + (0 - 9 \cdot 30)\frac{1}{8} = \frac{480}{8} = 60$$

から 60 円です。 □

演習問題 13.7 大中小３個のサイコロを同時に投げるとき、それぞれの出目を x, y, z とします。
(1) $x + y + z \geq 8$ となる確率を求めてください。
(2) $3x + 2y + z$ の期待値を求めてください。

$$P[x+y+z=3] = \frac{1}{6^3}$$
$$P[x+y+z=4] = P[(x,y,z) = (1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)] = \frac{3}{6^3}$$
$$P[x+y+z=5] = P[(1,1,3) \text{ の並替３種、} (1,2,2) \text{ の並替３種}] = \frac{6}{6^3}$$
$$P[x+y+z=6] = P[(1,1,4) \text{ の並替３種、} (1,2,3) \text{ の並替６種、} (2,2,2)] = \frac{10}{6^3}$$
$$\begin{aligned} P[x+y+z=7] &= P\,\big[(1,1,5) \text{ の並替３種、} (1,2,4) \text{ の並替６種、} \\ &\qquad (1,3,3) \text{ の並替３種、} (2,2,3) \text{ の並替３種}\big] \\ &= \frac{15}{6^3} \end{aligned}$$

ですから、

$$P[x+y+z \geq 8] = 1 - \frac{35}{6^3} = \frac{181}{216}$$

です。

(2)

$$E[x] = E[y] = E[z] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

に注意すれば、

$$E[3x+2y+z] = 3E[x] + 2E[y] + E[z] = 6E[x] = 21$$

です。 □