13　確率変数の分布・期待値

13.1　確率変数とその分布

例えばさいころを 1 個、1 回振ると云う試行において、『出た目を 4 で割った余り』と云うものを考える事が出来ます。これを仮に文字 X で表す事にしましょう。

X は従ってどの根元事象が起こったかによってその値が定まりますから、『根元事象を食べて実数を吐き出す関数』と考える事も出来ますが、ここではもう少しアバウトに、ランダムに値をとるものだと理解しておけば十分です。

現実に 1 回試行を行ってしまえばその値は具体的に与えられる事にはなりますが、それはたまたまそのような結果が出たと言うだけの事であってそれはもう『偶然』としか言い様がありませんから、試行の全ての結果を確率と云う形で全体として認識しようとする事に興味があります。

この様に、ある試行の結果に応じて値が定まるような “関数” の事を確率変数（random variable）と言います。

そしてこの確率変数が取り得る全ての値を書き出し、その値をとる確率と共に表としてまとめたものをこの確率変数の（確率）分布表（table of distribution）と言います。

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

演習問題 13.1 次の確率変数 X, Y の確率分布表をつくって下さい。

(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。

(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

演習問題 13.2 [教科書　問題 13.1] 白玉 3 個、赤玉 2 個の入った袋から次の方法で玉を取り出すとき、それぞれの確率変数 X, Y の確率分布表を作って下さい。

(1) 3 個の玉を同時に取り出すとき、白玉の個数を X とします。

(2) 1 個の玉を取り出し、それを袋に戻してまた 1 個の玉を取り出すことを 3 回繰り返すとき、白玉の出る回数を Y とします。

13.2　期待値

先の例に挙げた確率変数 X の分布表は

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

でしたが、十分多くの試行（N 回）を繰り返せば、X の値が 0 になるのは N 回中 $\frac{1}{6}\cdot N$ 回であろうと考えられます。つまり 0 が $\frac{1}{6}\cdot N$ 個結果としてあると考えられます。

また、同様に考えれば、$X=1$ となるのは $\frac{1}{3}\cdot N$ 回、$X=2$ となるのも同じ、$X=3$ となるのは $\frac{1}{6}\cdot N$ 回ですから、結果を全て足して個数で割ったものは

$$\frac{0\cdot\frac{1}{6}\cdot N+1\cdot\frac{1}{3}\cdot N+2\cdot\frac{1}{3}\cdot N+3\cdot\frac{1}{6}\cdot N}{N}=\frac{3}{2}$$

となりますからこれが X の平均値であると考えられます。

$$0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}.$$

定義 13.2.1 確率変数 X が取り得る値とその値をとる確率の積を全て足したものをその確率変数の期待値（expected value）あるいは平均値（mean）と言い、記号 $E[X]$ で表します：

$$E[X]=\sum_j x_j P[X=x_j].$$

演習問題 13.3 次の確率変数 X, Y の平均値を求めて下さい。

(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。

(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

13.2.1　確率変数の和と期待値

事実 13.2.2 $v, w \in \mathbb{R}$

$$E[vX+wY]=vE[X]+wE[Y]$$

例えば A、B ２つのサイコロを同時に投げる試行において、A サイコロの出目 D_1 と B サイコロの出目 D_2 は、『２つのサイコロを投げる』という共通の試行の結果によって値が定まる確率変数であって、

$$E[D_1 + D_2] = E[D_1] + E[D_2]$$

が成り立ちます。従って先の演習問題の (2) の確率変数 Y は、２つのサイコロを区別すれば、$Y = D_1 + D_2$ であって、

$$E[Y] = E[D_1] + E[D_2] = \frac{1 + \cdots + 6}{6} + \frac{1 + \cdots + 6}{6} = 7$$

とも計算されます。わざわざ $D_1 + D_2$ の分布表を作らなくて済むのでこちらの方が楽に計算できます。

13.3　問題演習

演習問題 13.4 [教科書　問題 13.2] 1 枚、2 枚および 3 枚の硬貨を投げるとき、表の出る枚数をそれぞれ X, Y, Z とし、それらの確率分布表と平均値を求めて下さい。

演習問題 13.5 白玉４個と赤玉２個が入った袋があります。そこから球を非復元抽出で１個ずつ取り出して行き、赤玉が出たらそこで取り出すのを止めるものとします。取り出された白玉の個数の期待値を求めてください。

演習問題 13.6 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、出る裏表の枚数に応じて、(表の枚数) $\times 100$ 円を受け取り、(裏の枚数)$^2 \times 30$ 円を支払わなければならないものとします。このゲームで得られる金額の期待値を求めてください。

演習問題 13.7 大中小３個のサイコロを同時に投げるとき、それぞれの出目を x, y, z とします。

(1) $x + y + z \geq 8$ となる確率を求めてください。

(2) $3x + 2y + z$ の期待値を求めてください。