13　確率変数の分布・期待値

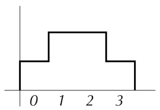
13.1　確率変数とその分布

ある試行の結果に応じて値が定まるような“関数”の事を確率変数（random variable）と言い、確率変数が取り得る全ての値を書き出し、その値をとる確率と共に表としてまとめたものをこの確率変数の（確率）分布表（table of distribution）と言います。

$X =$（さいころを 1 個、1 回振ったときの出た目を 4 で割った余り）

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

ヒストグラム：



演習問題 13.1 次の確率変数 X, Y の確率分布表をつくり、ヒストグラムを書いて下さい。
(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。
(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

13.2　期待値

定義 13.2.1 全事象 Ω が有限個の互いに排反な事象 $E_1, \ldots, E_n$ の和事象になっている（$\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_n, \quad E_j \cap E_k = \emptyset\,(j \neq k)$）とき、

$$X = x_j 1_{E_1} + \cdots + x_n 1_{E_n}$$

の型の確率変数は単純（simple）であると言います。

単純であることは、有限個の値しかとらないことと同値です。

定義 13.2.2 単純確率変数

$$X = x_1 1_{E_1} + \cdots + x_n 1_{E_n}, \quad E_j \cap E_k = \emptyset\,(j \neq k)$$

に対して、次で定まる実数 $E[X]$：

$$E[X] = x_1 P[E_1] + \cdots + x_n P[E_n]$$

を、X の期待値（expected value）あるいは平均値（mean）と言います。

一般に、単純確率変数を 1_E 型の確率変数の和で表す方法は複数あります。今見た定義は単純確率変数の 1_E 型の確率変数の和による『表現の仕方に依存しています』から、異なった表現に対して異なった値が定義されてしまう恐れがあります。そうではなく、表現の仕方によらない値になっていることを確かめなければ、きちんと定義したとは言えません（詳細略）。

事実 13.2.3 X が異なる有限個の値 $x_1, \ldots, x_n$ のみをとるとき、期待値 $E[X]$ は

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P[X = x_j]$$

に一致します。

今日最初に見た確率変数 X の分布表は

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

であり、期待値は

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

ですが、これは十分大きな N を使って

$$E[X] = \frac{0 \cdot \frac{1}{6} \cdot N + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot N + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot N + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot N}{N} = \frac{3}{2}$$

とも書くことができます。

十分多くの試行（N 回）を繰り返せば、X の値が 0 になるのは N 回中 $\frac{1}{6} \cdot N$ 回であろうと考えられます。つまり 0 が $\frac{1}{6} \cdot N$ 個結果としてあると考えられます。

また、同様に考えれば、$X = 1$ となるのは $\frac{1}{3} \cdot N$ 回、$X = 2$ となるのも同じ、$X = 3$ となるのは $\frac{1}{6} \cdot N$ 回ですから、期待値は、結果を全て足して個数で割ったもの（つまり、想像上の平均値）であると考えられます。

演習問題 13.2 演習問題 13.1 の確率変数 X, Y の期待値（平均値）を求めて下さい。
(1) 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。
(2) 2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。

演習問題 13.3 [教科書　問題 13.1] 白玉 3 個、赤玉 2 個の入った袋から次の方法で玉を取り出すとき、それぞれの確率変数 X, Y の確率分布表を作り、期待値を計算して下さい。
(1) 3 個の玉を同時に取り出すとき、白玉の個数を X とします。
(2) 1 個の玉を取り出し、それを袋に戻してまた 1 個の玉を取り出すことを 3 回繰り返すとき、白玉の出る回数を Y とします。

13.3　問題演習

演習問題 13.4 [教科書　問題 13.2] 1 枚、2 枚および 3 枚の硬貨を投げるとき、表の出る枚数をそれぞれ X, Y, Z とし、それらの確率分布表と平均値を求めて下さい。

演習問題 13.5 白玉 4 個と赤玉 2 個が入った袋があります。そこから球を非復元抽出で 1 個ずつ取り出して行き、赤玉が出たらそこで取り出すのを止めるものとします。取り出された白玉の個数の期待値を求めてください。

演習問題 13.6 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、出る裏表の枚数に応じて、(表の枚数) $\times 100$ 円を受け取り、(裏の枚数)$^2 \times 30$ 円を支払わなければならないものとします。このゲームで得られる金額の期待値を求めてください。

演習問題 13.7 [東大編入（抜）2023] 正 N 角形（N は 3 以上の整数）がある。この図形の頂点を反時計回りに $V_0, V_1, \ldots, V_{N-1}$ とする。点 P は $0, 1, \ldots, K-1$ の出目を持つルーレット（K は 2 以上の整数）を回して出た目 k に基づいて、V_0 から反時計回りに頂点を移動する。出目の確率は全て等しく、ルーレットを回す各試行は独立である。ルーレットを 2 回まわして移動する際、2 回目の試行による移動開始位置は、1 回目の試行により止まった頂点とする。

(1) $N = 5, K = 6$ とする。点 P は出た目 k に基づいて k ステップ移動する。例えば $k = 2$ なら V_0 から V_2 に移動する。
(a) ルーレットを 1 回まわした後に点 P が V_0 に止まる確率を求めよ。
(b) ルーレットを 2 回まわした後に点 P が V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 に止まる確率をそれぞれ求めよ。

(2) $N = 3, K = 99$ とする。点 P は出た目 k に基づいて k^2 ステップ移動する。例えば $k = 2$ なら V_0 から V_1 に移動する。
(a) ルーレットを 1 回まわした後に点 P が V_0, V_1, V_2 に止まる確率をそれぞれ求めよ。
(b) ルーレットを 2 回まわしたとき、1 回目に止まった頂点を V_n、2 回目に止まった頂点を V_m とする。$n + m$ の期待値を求めよ。