

14 分散、2 項分布

14.1 期待値の性質

14.1.1 確率変数と関数の合成

やはり今日最初に考えた確率変数 X を例にとって考えましょう。分布は

x	0	1	2	3
$P[X = x]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

でした。

ここで更に任意の実数 x に対して x を 2 で割った余りを対応させる関数 $f(x)$ を考え、この関数 f と確率変数 X の合成： $f(X)$ を考えましょう。

するとこれもランダムな値をとる関数であって、どんな値をとるかは確率の意味で計算する事が出来ます。

例えば $f(X) = 0$ となるのは $X = 0, 2$ のときですが、これは大元に戻って考えればそれぞれさいころの出目が 4 あるいは 2、6 だった場合ですから、

$$P[f(X) = 0] = P[X = 0 \text{ 又は } X = 2] = P[\text{出目が } 2, 4, 6 \text{ のいずれか}] = \frac{1}{2}$$

ですし、 $f(X) = 1$ となるのは $X = 1, 3$ の場合であってこれをさいころの出目で言えば 1、3、5 の場合に対応しています：

$$P[f(X) = 1] = P[X = 1 \text{ 又は } X = 3] = P[\text{出目が } 1, 3, 5 \text{ のいずれか}] = \frac{1}{2}.$$

従って $f(X)$ の分布表は

x	0	1
$P[f(X) = x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

となり、期待値を計算すると

$$E[f(X)] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

となるのですが、 $f(X)$ の期待値を求めるのに最初に戻ってきちんと $f(X)$ の分布表を作らないといけないのでしょうか。

$$\begin{aligned} E[f(X)] &= 0 \cdot P[f(X) = 0] + 1 \cdot P[f(X) = 1] \\ &= 0 \cdot P[X = 0, 2] + 1 \cdot P[X = 1, 3] \\ &= 0 \cdot P[X = 0] + 0 \cdot P[X = 2] + 1 \cdot P[X = 1] + 1 \cdot P[X = 3] \end{aligned}$$

であることに注目すると、 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = f(3) = 1$ なので

$$= f(0)P[X = 0] + f(2)P[X = 2] + f(1)P[X = 1] + f(3)P[X = 3]$$

と書ける事が分かりますから、何も $f(X)$ の分布を求める必要はなく、 X の分布を利用して X がある値をとる確率とその値に応じた $f(X)$ の値を掛け合わせて全て足せば期待値が得られます。

事実 14.1.1 確率変数 X と関数 $f(x)$ を合成して得られる確率変数 $f(X)$ の期待値は次式によって計算されます：

$$E[f(X)] = \sum_j f(x_j)P[X = x_j].$$

特に $f(x)$ が 1 次関数であるとき、すなわち $f(x) = ax + b$ である場合には

$$\begin{aligned} E[f(X)] &= \sum_j (ax_j + b)P[X = x_j] \\ &= a \sum_j x_j P[X = x_j] + b \sum_j P[X = x_j] \\ &= aE[X] + b \end{aligned}$$

となる事は特筆に値するでしょう。

演習問題 14.1 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。確率変数 X について $X - 1, (X - 1)^2$ の平均を求めて下さい。

【解答例】 X の分布は

x	0	1	2
$P[X = x]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

でしたから、

$$\begin{aligned} E[X-1] &= (0-1)P[X=0] + (1-1)P[X=1] + (2-1)P[X=2] \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \\ E[(X-1)^2] &= (0-1)^2P[X=0] + (1-1)^2P[X=1] + (2-1)^2P[X=2] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となります。

□

一般に、自乗の期待値は期待値の自乗にはならないこと、 $E[(X-1)^2] \neq \{E[X-1]\}^2$ に注意して下さい。

演習問題 14.2 確率変数 X の平均が 0.5 であるとき、 $E[2X+3]$ を求めて下さい。

$$E[2X+3] = 2E[X] + 3 = 4.$$

□

14.2 分散・標準偏差

確率変数の値が平均値からどの程度ずれて分布しているかを調べます。

単純に各数値と平均値との差をとった $X - E[X]$ を考えてもその平均値は

$$E[X - E[X]] = E[X] - E[X] = 0$$

となってしまいます。つまり『ずれ』そのものの平均値はずれが 2 の部分と -2 の部分が打ち消し合って 0 になってしまい埒があきません。そこで右にずれるのも左にずれるのも区別しない事にしてずれの絶対値をとって $E[|X - E[X]|]$ とするのですが、絶対値を含む計算は面倒になりますからこれもイマイチです。そこで代替物として自乗 $E[(X - E[X])^2]$ を使う事にします。

定義 14.2.1 確率変数 X に対し $E[(X - E[X])^2]$ を X の分散 (variance) と言って記号 $Var[X]$ で表します。また、分散の正の平方根を標準偏差 (standard deviation) と言います。

分散は差の自乗ですから例えば長さのデータなら単位がメートルの自乗になってしまっています。そこでスケールを元に戻した標準偏差を使う事も大いにあります。

また、

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \sum_j (x_j - E[X])^2 P[X = x_j] \\ &= \sum_j x_j^2 P[X = x_j] - 2 \sum_j x_j P[X = x_j] E[X] + E[X]^2 \sum_j P[X = x_j] \\ &= E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

となっている事が分かります。場合によってはこの形の方が便利な場合もありますので覚えておくべきです。

更に、

$$Var[X+b] = E[(X+b-E[X+b])^2] = E[(X+b-E[X]-b)^2] = E[(X-E[X])^2] = Var[X]$$

であり、定数倍は

$$Var[aX] = E[(aX - E[aX])^2] = E[(aX - aE[X])^2] = E[a^2(X - E[X])^2] = a^2 Var[X]$$

となりますから、合わせると次の等式が成り立つ事が分かります：

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$

問題 14.2.2 演習問題 13.3 の確率変数 X, Y について分散と標準偏差を求めて下さい。

【解答例】

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = (0 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \cdot \frac{2}{4} + (2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\text{Var}[X]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Var}[Y] = E[(Y - 7)^2]$$

$$= (2 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\ + (6 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7 - 7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8 - 7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9 - 7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\ + (10 - 7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11 - 7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12 - 7)^2 \cdot \frac{1}{36}$$

$$= \frac{5^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 5 + 0^2 \cdot 6}{+ 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 1}$$

$$= \frac{25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25}{36}$$

$$= \frac{210}{36}$$

$$= \frac{35}{6}$$

$$\sqrt{\text{Var}[Y]} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2.415$$

□

演習問題 14.3 [教科書 問題 13.3] 下の確率分布表に従う確率変数 X の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

k	1	2	3	4
$P[X = k]$	0.4	0.3	0.2	0.1

【解答例】

$$E[X] = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 = 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.4 = 2$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - 2)^2] = 1^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.1 = 1$$

$$\sqrt{\text{Var}[X]} = 1$$

□

演習問題 14.4 [教科書 問題 13.4] 演習問題 13.2 の確率変数 X, Y の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

【解答例】

$$E[X] = 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{6}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{18}{10} = 1.8$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{6}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{18}{10}\right)^2 = \frac{36}{100} = 0.36$$

$$\sqrt{\text{Var}[X]} = 0.6$$

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{36}{125} + 2 \cdot \frac{54}{125} + 3 \cdot \frac{27}{125} = \frac{36 + 108 + 81}{125} = \frac{225}{125} = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = 1 \cdot \frac{36}{125} + 2^2 \cdot \frac{54}{125} + 3^2 \cdot \frac{27}{125} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{18}{25} = 0.72$$

$$\sqrt{\text{Var}[Y]} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \approx 0.848$$

□

14.3 2 項分布

1 回の試行で事象 A の起きる確率が p であり、起きない確率が $q = 1 - p$ である様な試行を、独立に n 回繰り返した時にそのうち k 回だけ A が起きる確率 p_k を計算してみましょう。

A が起きたことを○で、起きなかったことを×で表すことにすると、例えば試行を 9 回繰り返したときに丁度 4 回 A が起きた結果には

$$\begin{array}{cccccccccc} \circ & \times & \times & \circ & \circ & \times & \times & \times & \circ & \\ \times & \times & \circ & \circ & \times & \circ & \times & \circ & \times & \end{array}$$

などがあります（左から順に 1 回目、2 回目、...）が、これらの結果が起きる確率は（独立性により）どちらも

$$\begin{aligned} P[\circ \times \times \circ \circ \times \times \times \circ] &= pqpppqpp = p^4 q^5 \\ P[\times \times \circ \circ \times \circ \times \circ \times] &= qqpppqpp = p^4 q^5 \end{aligned}$$

と云う風に同じ値になっています。今は 2 種類だけ書きましたが実際には 9 回中 4 回 A が起きた結果には ${}_9C_4$ 通りのヴァリエーションがあって（9 回の試行のうち“どの 4 回”に A が起きたか）、それらはすべて同じ確率 $p^4 q^5$ で起きますし、すべて背反です（同時には起らない）。従って 9 回中に 4 回 A が起きる確率は

$${}_9C_4 p^4 q^5$$

となります。

同様に考えれば、 n 回試行を終えた全ての結果のうち事象 A が k 回起きているものは 1 つあたり $p^k q^{n-k}$ の確率であって、それが n 回のうちどの k 回に A が起きたかのヴァリエーションで ${}_nC_k$ 通りありますから

$$p_k = {}_nC_k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

となっています。 n 回の反復試行中の事象 A が起きた回数を確率変数 X としてその確率（＝相対度数）分布表の形式で書けば以下の様になります。このような確率変数の分布を 2 項分布（binomial distribution）と呼び、 $B(n, p)$ と書くことにします。

j	0	1	2	...	j	...	n
$P[X = j]$	q^n	npq^{n-1}	${}_nC_2 p^2 q^{n-2}$	...	${}_nC_j p^j q^{n-j}$	...	p^n

14.4 2 項分布の平均・分散

2 項分布 $B(n, p)$ の平均値は、1 回の試行につき『事象 A が p 回起きた』と考えれば、 n 回では np 回になるはずです。さて実際どうなるかきちんと求めてみましょう。

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \cdot q^n + 1 \cdot {}_nC_1 p q^{n-1} + 2 \cdot {}_nC_2 p^2 q^{n-2} + \dots + k \cdot {}_nC_k p^k q^{n-k} + \dots + n \cdot p^n \\ &= p \{ {}_nC_1 \cdot 1 \cdot q^{n-1} + {}_nC_2 \cdot 2p \cdot q^{n-2} + \dots + {}_nC_k \cdot k p^{k-1} \cdot q^{n-k} + \dots + n p^{n-1} \} \end{aligned}$$

ですが、ここで定数 p を形式的に変数と見て、 p で微分した形と考えれば

$$\begin{aligned} &= p \frac{d}{dp} \{ q^n + {}_nC_1 p q^{n-1} + {}_nC_2 p^2 q^{n-2} + \dots + {}_nC_k p^k q^{n-k} + \dots + p^n \} \\ &= p \frac{d}{dp} (p + q)^n \\ &= pn(p + q)^{n-1} \end{aligned}$$

ですから、ここで再び元の定数として考えれば $p + q = 1$ なので $E[X] = np$ が分かります。

次に分散ですが、これは $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ に注意すれば

$$\begin{aligned} Var[X] &= 0^2 \cdot q^n + 1^2 \cdot {}_nC_1 p q^{n-1} + 2^2 \cdot {}_nC_2 p^2 q^{n-2} + \\ &\quad \dots + k^2 \cdot {}_nC_k p^k q^{n-k} + \dots + n^2 \cdot p^n - (np)^2 \end{aligned}$$

です。平均はそのまま変数と見て計算しましたが、今回はちゃんと関数を考えて

$$(x + q)^n = q^n + {}_nC_1 x q^{n-1} + \dots + {}_nC_k x^k q^{n-k} + \dots + x^n$$

の両辺 x で微分すれば

$$n(x + q)^{n-1} = {}_nC_1 q^{n-1} + \dots + {}_nC_k k x^{k-1} q^{n-k} + \dots + n x^{n-1}$$

ですがここで両辺に x を掛けてからもう一度 x で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ nx(x + q)^{n-1} \} &= \frac{d}{dx} \{ {}_nC_1 x q^{n-1} + \dots + {}_nC_k k x^k q^{n-k} + \dots + n x^n \} \\ &= {}_nC_1 q^{n-1} + \dots + {}_nC_k k^2 x^{k-1} q^{n-k} + \dots + n^2 x^{n-1} \end{aligned}$$

となります。ここで左辺の微分は

$$\frac{d}{dx} \{ nx(x + q)^{n-1} \} = n(x + q)^{n-1} + n(n-1)x(x + q)^{n-2}$$

でしたから、ここでもう一度両辺に x を掛けます：

$$\begin{aligned} nx(x+q)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+q)^{n-2} \\ = {}_nC_1 x q^{n-1} + \cdots + {}_nC_k k^2 x^k q^{n-k} + \cdots + n^2 x^n \end{aligned}$$

するとここで x に $x=p$ を代入すれば

$$np + n(n-1)p^2 = {}_nC_1 p q^{n-1} + \cdots + {}_nC_k k^2 p^k q^{n-k} + \cdots + n^2 p^n$$

です。ここで右辺は $E[X^2]$ であり、 $(np)^2$ を引けば $Var[X]$ に等しくなりますから、結局左辺から $(np)^2$ を引いて

$$Var[X] = np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2 = np(1-p) = npq$$

が得られます。

事実 14.4.1 2 項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の期待値と分散は

$$E[X] = np, \quad Var[X] = npq$$

です。

演習問題 14.5 [教科書 問題 13.6] 次の 2 項分布に従う確率変数の平均値と分散を求めて下さい。

(1) $B(10, 0.5)$ (2) $B(5, 0.2)$ (3) $B(100, 0.1)$

【解答】(1) (平均値) $= 10 \cdot 0.5 = 5$, (分散) $= 10 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

(2) (平均値) $= 5 \cdot 0.2 = 1$, (分散) $= 5 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.8$.

(3) (平均値) $= 100 \cdot 0.1 = 10$, (分散) $= 100 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 9$. □

問題 14.4.2 [教科書 例題 13.1 改題] 次の確率変数の確率分布表とヒストグラム (棒グラフ) を作って下さい。

(1) 1 個のさいころを 4 回繰り返して投げるとき、6 の目の出る回数 X 。

(2) 8 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数 Y 。

【解答例】(1) X は 2 項分布 $B(4, \frac{1}{6})$ に従いますから

$$P[X = k] = {}_4C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$$

です。概算値は

$$P[X = 0] = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P[X = 1] = {}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4} \approx 0.386$$

$$P[X = 2] = {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 1 \cdot 6^4} \approx 0.116$$

$$P[X = 3] = {}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{4 \cdot 5}{6^4} \approx 0.015$$

$$P[X = 4] = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \approx 0.001$$

です。

k	0	1	2	3	4
$P[X = k]$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ≈ 0.482	${}_4C_1 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^3$ ≈ 0.386	${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ ≈ 0.116	${}_4C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)$ ≈ 0.015	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$ ≈ 0.001

(2) これは同時に投げると言っていますが、8 枚すべて『違う』硬貨ですので、それぞれが独立に表あるいは裏となります。従ってすべて区別して『1 枚ずつ』投げても結果は (確率的には) 全く一緒ですし、1 枚の硬貨を 8 回投げても (確率の上では) 全く同じ結果となりますから、確率変数 Y は 2 項分布 $B(8, \frac{1}{2})$ に従います。

$$P[Y = j] = {}_8C_j \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

概算値は

$$P[Y = 0] = P[Y = 8] = \frac{1}{2^8} \approx 0.004$$

$$P[Y = 1] = P[Y = 7] = \frac{8}{2^8} \approx 0.031$$

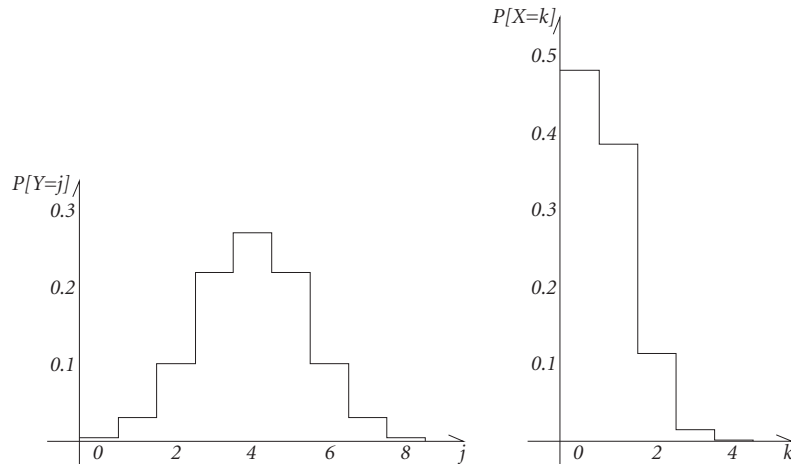
$$P[Y = 2] = P[Y = 6] = \frac{8 \cdot 7}{2^9} \approx 0.109$$

$$P[Y = 3] = P[Y = 5] = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2^9} \approx 0.219$$

$$P[Y = 4] = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2^9} \approx 0.273$$

です。

j	0	1	2	3	4
$P[Y = j]$	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{8C_2}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{8C_3}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{8C_4}{2^8}$ ≈ 0.273
j	5	6	7	8	
$P[Y = j]$	$\frac{8C_5}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{8C_6}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	



$p = \frac{1}{2}$ のときは分布は左右対称になります。 $p \neq \frac{1}{2}$ の時は左右対称ではありませんが、 n が大きくなれば左右対称に近づいて行くことが知られています。

演習問題 14.6 [教科書 問題 13.5] 2項分布 $B(10, 0.5)$, $B(5, 0.2)$ の確率分布表を作り、ヒストグラムを描いて下さい。

【解答例】まず $B(10, 0.5)$ ですが、この分布に従う確率変数 X に対し

$$P[X = k] = {}_{10}C_k \frac{1}{2^{10}}$$

ですから、概算で

$$\begin{aligned} P[X = 0] &= P[X = 10] = \frac{1}{2^{10}} \approx 0.001 \\ P[X = 1] &= P[X = 9] = \frac{10}{2^{10}} \approx 0.010 \\ P[X = 2] &= P[X = 8] = \frac{10 \cdot 9}{2^{11}} \approx 0.044 \\ P[X = 3] &= P[X = 7] = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2^{11}} \approx 0.117 \\ P[X = 4] &= P[X = 6] = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2^{11}} \approx 0.205 \\ P[X = 5] &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^{11}} \approx 0.246 \end{aligned}$$

となります。

k	0	1	2	3	4	5
$P[X = k]$	$\frac{1}{2^{10}}$ ≈ 0.001	$\frac{10}{2^{10}}$ ≈ 0.010	$\frac{{}_{10}C_2}{2^{10}}$ ≈ 0.044	$\frac{{}_{10}C_3}{2^{10}}$ ≈ 0.117	$\frac{{}_{10}C_4}{2^{10}}$ ≈ 0.205	$\frac{{}_{10}C_5}{2^{10}}$ ≈ 0.246
k	6	7	8	9	10	
$P[X = k]$	$\frac{{}_{10}C_6}{2^{10}}$ ≈ 0.205	$\frac{{}_{10}C_7}{2^{10}}$ ≈ 0.117	$\frac{{}_{10}C_8}{2^{10}}$ ≈ 0.044	$\frac{10}{2^{10}}$ ≈ 0.010	$\frac{1}{2^{10}}$ ≈ 0.001	

(2) $B(5, 0.2)$ に従う確率変数 Y について

$$P[Y = k] = {}_5C_k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$$

ですから、概算で

$$\begin{aligned} P[Y = 0] &= \frac{4^5}{5^5} \approx 0.328 \\ P[Y = 1] &= \frac{5 \cdot 4^4}{5^5} \approx 0.410 \\ P[Y = 2] &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 4^3}{2 \cdot 5^5} \approx 0.205 \\ P[Y = 3] &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^2}{3 \cdot 2 \cdot 5^5} \approx 0.051 \\ P[Y = 4] &= \frac{5 \cdot 4}{5^5} \approx 0.006 \\ P[Y = 5] &= \frac{1}{5^5} \approx 0.000 \end{aligned}$$

となります。

k	0	1	2	3	4	5
$P[Y = k]$	$\frac{4^5}{5^5}$ ≈ 0.328	$\frac{5 \cdot 4^4}{5^5}$ ≈ 0.410	$\frac{{}_5C_2 4^3}{5^5}$ ≈ 0.205	$\frac{{}_5C_3 4^2}{5^5}$ ≈ 0.051	$\frac{{}_5C_4 4}{5^5}$ ≈ 0.006	$\frac{1}{5^5}$ ≈ 0.000

