14　分散、２項分布

14.1　期待値の性質

14.1.1　確率変数と関数の合成

事実 14.1.1 確率変数 X と関数 $f(x)$ を合成して得られる確率変数 $f(X)$ の期待値は次式によって計算されます：

$$E[f(X)] = \sum_j f(x_j)P[X = x_j].$$

特に $f(x) = ax + b$ である場合：

$$\begin{aligned}E[f(X)] &= \sum_j (ax_j + b)P[X = x_j]\\ &= a\sum_j x_j P[X = x_j] + b\sum_j P[X = x_j]\\ &= aE[X] + b.\end{aligned}$$

演習問題 14.1 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。確率変数 X について $X - 1, (X-1)^2$ の平均を求めて下さい。

演習問題 14.2 確率変数 X の平均が 0.5 であるとき、$E[2X+3]$ を求めて下さい。

14.2　分散・標準偏差

定義 14.2.1 確率変数 X に対し $E\left[(X - E[X])^2\right]$ を X の分散（variance）と言って記号 $Var[X]$ で表します。また、分散の正の平方根を標準偏差（standard deviation）と言います。

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2, \quad Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$

問題 14.2.2 演習問題 13.3 の確率変数 X, Y の分散と標準偏差を求めて下さい。

【解答例】

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = (0-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (1-1)^2\cdot\frac{2}{4} + (2-1)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{Var[X]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}Var[Y] &= E\left[(Y-7)^2\right]\\ &= (2-7)^2\cdot\frac{1}{36} + (3-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (4-7)^2\cdot\frac{3}{36} + (5-7)^2\cdot\frac{4}{36}\\ &\quad + (6-7)^2\cdot\frac{5}{36} + (7-7)^2\cdot\frac{6}{36} + (8-7)^2\cdot\frac{5}{36} + (9-7)^2\cdot\frac{4}{36}\\ &\quad + (10-7)^2\cdot\frac{3}{36} + (11-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (12-7)^2\cdot\frac{1}{36}\\ &= \frac{\begin{array}{l}5^2\cdot 1 + 4^2\cdot 2 + 3^2\cdot 3 + 2^2\cdot 4 + 1^2\cdot 5 + 0^2\cdot 6\\ \quad + 1^2\cdot 5 + 2^2\cdot 4 + 3^2\cdot 3 + 4^2\cdot 2 + 5^2\cdot 1\end{array}}{36}\\ &= \frac{25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25}{36}\\ &= \frac{35}{6}\end{aligned}$$

$$\sqrt{Var[Y]} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2.415$$

□

演習問題 14.3 [教科書　問題 13.3] 下の確率分布表に従う確率変数 X の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

k	1	2	3	4
$P[X=k]$	0.4	0.3	0.2	0.1

演習問題 14.4 [教科書　問題 13.4] 演習問題 13.2 の確率変数 X, Y の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

14.3　２項分布

1 回の試行で事象 A の起きる確率が p であり、起きない確率が $q = 1 - p$ である様な試行を、独立に n 回繰り返した時にそのうち k 回だけ A が起きる確率 p_k は、n 回試行を終えた全ての結果のうち事象 A が k 回起きているものは 1 つあたり $p^k q^{n-k}$ の確率であって、それが n 回のうちどの k 回に A が起きたかのヴァリエーションで ${}_n\mathrm{C}_k$ 通りありますから

$$p_k = {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

となっています。n 回の反復試行中の事象 A が起きた回数を確率変数 X としてその確率（＝相対度数）分布表の形式で書けば以下の様になります。このような確率変数の分布を２項分布（binomial distribution）と呼び、$B(n, p)$ と書くことにします。

j	0	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n
$P[X = j]$	q^n	npq^{n-1}	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_j p^j q^{n-j}$	$\cdots$	p^n

14.4　２項分布の平均・分散

事実 14.4.1 ２項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の期待値と分散は以下の通り：

$$E[X] = np, \quad Var[X] = npq.$$

演習問題 14.5 [教科書　問題 13.6] 次の２項分布に従う確率変数の平均値と分散を求めて下さい。

(1) $B(10, 0.5)$　(2) $B(5, 0.2)$　(3) $B(100, 0.1)$

問題 14.4.2 [教科書　例題 13.1　改題] 次の確率変数の確率分布表とヒストグラム（棒グラフ）を作って下さい。

(1) 1 個のさいころを 4 回繰り返して投げるとき、6 の目の出る回数 X。

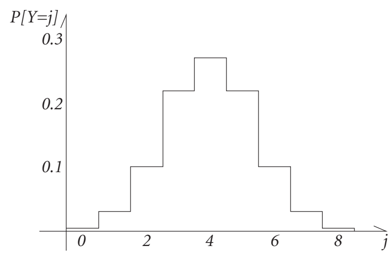
(2) 8 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数 Y。

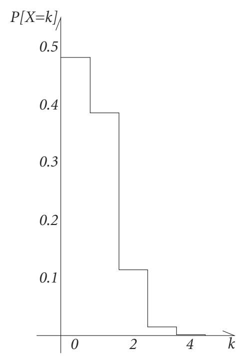
【解答例】(1) X は２項分布 $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$ に従いますから $P[X = k] = {}_4\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ です。

k	0	1	2	3	4
$P[X = k]$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ≈ 0.482	${}_4\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ≈ 0.386	${}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ≈ 0.116	${}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$ ≈ 0.015	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$ ≈ 0.001

(2) 確率変数 Y は２項分布 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ に従います：$P[Y = j] = {}_8\mathrm{C}_j \left(\frac{1}{2}\right)^8$.

j	0	1	2	3	4
$P[Y = j]$	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{{}_8\mathrm{C}_4}{2^8}$ ≈ 0.273
j	5	6	7	8	
$P[Y = j]$	$\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{{}_8\mathrm{C}_6}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	





演習問題 14.6 [教科書　問題 13.5] ２項分布 $B(10, 0.5), B(5, 0.2)$ の確率分布表を作り、ヒストグラムを描いて下さい。