14　分散

14.1　期待値の性質

14.1.1　確率変数と関数の合成

事実 14.1.1 $X = \sum_j x_j P[X = x_j]$

$$E[f(X)] = \sum_j f(x_j)P[X = x_j]. \quad \text{特に } E[aX+b] = aE[X]+b$$

演習問題 14.1 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X とします。確率変数 X について $X-1, (X-1)^2$ の平均を求めて下さい。

14.1.2　期待値の線形性

事実 14.1.2 $v, w \in \mathbb{R} \quad E[vX + wY] = vE[X] + wE[Y].$

演習問題 14.2 大中小３個のサイコロを同時に投げるとき、それぞれの出目を x, y, z とします。
(1) $x + y + z \geq 8$ となる確率を求めてください。
(2) $3x + 2y + z$ の期待値を求めてください。

14.2　分散・標準偏差

定義 14.2.1 確率変数 X に対し $E\left[(X - E[X])^2\right]$ を X の分散（variance）と言って記号 $Var[X]$ で表します。また、分散の正の平方根を標準偏差（standard deviation）と言います。

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2, \quad Var[aX+b] = a^2 Var[X].$$

問題 14.2.2 2 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を X、2 つのさいころを振ったとき、出る目の和を Y とします。確率変数 X, Y の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

【解答例】

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{2}{4} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{Var[X]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
Var[Y] &= E\left[(Y-7)^2\right] \\
&= (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\
&\quad + (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7-7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\
&\quad + (10-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{\begin{array}{c} 5^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 5 + 0^2 \cdot 6 \\ + 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 1 \end{array}}{36} \\
&= \frac{25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 5 + 16 + 27 + 32 + 25}{36} \\
&= \frac{35}{6}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{Var[Y]} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2.415$$

□

演習問題 14.3 [教科書　問題 13.3] 下の確率分布表に従う確率変数 X の平均値・分散・標準偏差を求めて下さい。

k	1	2	3	4
$P[X = k]$	0.4	0.3	0.2	0.1

演習問題 14.4 [教科書　問題 13.4] 白玉 3 個、赤玉 2 個の入った袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき、白玉の個数を X、

1 個の玉を取り出し、それを袋に戻してまた 1 個の玉を取り出すことを 3 回繰り返すとき、白玉の出る回数を Y とします。

確率変数 X, Y について分散と標準偏差を求めて下さい。