15　総復習

15.1　練習問題 12

演習問題 15.1 ある人が 3 つの課題 A、B、C に成功する確率は、それぞれ 0.5、0.6、0.7 です。これら 3 つの課題に挑んだとき、少なくとも 1 つに成功する確率を求めて下さい。

【解答例】各課題に成功・失敗するかどうかは互いに独立であると考えます。

$$\begin{aligned} P[\text{少なくとも 1 つ成功}] &= 1 - P[\text{全て失敗}] \\ &= 1 - 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.3 \\ &= \frac{1000-60}{1000} \\ &= \frac{940}{1000} \\ &= 0.94 \end{aligned}$$

□

演習問題 15.2 白玉 6 個、赤玉 4 個、黒玉 2 個が入っている袋から同時に 4 個の玉を取り出すとき、次の確率を求めて下さい。
(1) 白玉が 2 個で赤玉と黒玉が 1 個ずつである確率。
(2) 白玉 2 個、赤玉 2 個である確率。
(3) 赤玉が 2 個以上含まれている確率。

【解答例】(1) 全ての結果のヴァリエーションの総数は ${}_{12}\mathrm{C}_4$ 通りであり、そのうち題意の通りの結果は ${}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1$ 通りですから求める確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot4\cdot2}{\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{6\cdot5\cdot4}{11\cdot5\cdot9} = \frac{8}{33}$$

です。

(2) 同様に

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \cdot {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}}{\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{2}{11}$$

です。

(3) これも同様に

$$P[\text{赤が 1 個}] = \frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_4}, \qquad P[\text{赤が 0 個}] = \frac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}$$

ですから

$$P[\text{赤が 1 個以下}] = \frac{4\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}+\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{4\cdot8\cdot7+7\cdot2\cdot5}{11\cdot5\cdot9} = \frac{98}{165}$$

が分かり、結局求める確率は

$$1 - \frac{98}{165} = \frac{67}{165}$$

です。 □

演習問題 15.3 白玉と赤玉が 5 個ずつ計 10 個入った箱があります。いま任意に 1 個を取り出して、白玉ならば箱に戻さず、赤玉ならば箱に戻して良くかき混ぜて次の 1 個を取り出します。この操作を繰り返すとき次の確率を求めて下さい。
(1) 2 回目が白玉である確率。
(2) 2 回目と 3 回目がともに白玉である確率。

【解答例】(1)

$$\begin{aligned} P[\text{2 回目が白}] &= P[\text{1 回目が白で 2 回目も白}] + P[\text{1 回目が赤で 2 回目が白}] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P[\text{2 回目と 3 回目が白}] &= P[\text{白白白}] + P[\text{赤白白}] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} \\ &= \frac{7}{36} \end{aligned}$$

□

演習問題 15.4 正 5 角形 $ABCDE$ の頂点を、A から出発して $B, C, \ldots$ の順に左まわりに移動する点 P があります。さいころを振って出た目の数だけ P を移動することにし、k 回目に進んだ点の位置を P_k とします。たとえば 1 回目に 3、2 回目に 2、3 回目に 1 が出たときは、$P_1 = D, P_2 = A, P_3 = B$ です。そのとき次の確率を求めて下さい。

(1) $P_1 = P_2$ となる確率。
(2) P_1 と P_2 が隣り合う確率。
(3) $P_2 = A$ となる確率。
(4) P_1 または P_2 が A となる確率。
(5) $P_3 = A$ となる確率。
(6) P_1, P_2, P_3 がすべて異なる確率。

【解答例】(1) この場合は 1 回目の出目は何でも良く、2 回目に 5 が出れば良いので、その確率は

$$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

です。

(2) この場合も 1 回目は何でも良く、2 回目に 1 か 4 か 6 が出れば良いのでその確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ です。

(3) $P_2 = A$ となるためには、1 回目と 2 回目の出目の合計が 5 あるいは 10 であれば良く、それは出目が

$$1 \cdot 4, \quad 2 \cdot 3, \quad 3 \cdot 2, \quad 4 \cdot 1, \quad 4 \cdot 6, \quad 5 \cdot 5, \quad 6 \cdot 4$$

の場合ですから、求める確率は $\frac{7}{36}$ です。

(4) $P_1 = A$ となるのは、1 回目に 5 が出る場合のみであり、その確率は $\frac{1}{6}$ です。$P_2 = A$ となるのは今見たように確率が $\frac{7}{36}$ です。また、$P_1 = P_2 = A$ となるのは 1 回目も 2 回目も 5 が出た場合のみであり、その確率は $\frac{1}{36}$ なので、求める確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$$

です。

(5) $P_3 = A$ となるためには、3 回の出目の合計が 5、10、15 のいずれかであるときのみです。そのような出目の順列は以下のように：

出目の合計	出目の組み合わせ	出目の順列の総数
5 :	113	3
	122	3
10 :	136	6
	145	6
	226	3
	235	6
	244	3
	334	3
15 :	366	3
	456	6
	555	1

43 通りありますから、全ての出目のヴァリエーションの総数 6^3 で割って求める確率は $\frac{43}{216}$ です。

(6) 題意を満たすためには 1 回目の出目は何でも良く、2 回目は 5 ではなく、2 回目と 3 回目の出目の合計は 5 でも 10 でもなく、3 回目は 5 ではないことが必要十分条件となります。これを満たさない出目の順列は以下に見るように：

出目の条件	出目の順列	出目の順列の総数
2 回目が 5	$*5*$	36
3 回目が 5	$**5$	36
2 回目と 3 回目の合計が 5	$*14$	6
	$*23$	6
	$*32$	6
	$*41$	6
2 回目と 3 回目の合計が 10	$*46$	6
	$*55$	6
	$*64$	6
重複しているもの	$*55$	12

102 通りありますから、求める確率は

$$1 - \frac{102}{6^3} = \frac{19}{36}$$

です。 □

演習問題 15.5 2 個の不良品を含んだ製品 10 個があります。いま 1 個ずつ取り出して検査を行い、2 個の不良品を見つけたときこの検査は終わるものとします。次の確率を求めて下さい。
(1) 2 回で検査が終わる確率。
(2) 4 回までに検査が終わる確率。
(3) ちょうど 4 回で検査が終わる確率。

【解答例】(1) 2 回連続で不良品を引けば良いのでその確率は

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$$

です。

(2) 4 回目までに検査が終わらないのは、最初の 4 回で不良品を 1 個以下しか引かなかった場合です。まず

$$P[4\text{ 回で不良品 }0\text{ 個}]=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}P[4\text{ 回で不良品 }1\text{ 個}]&=\sum_{j=1}^{4}P[\text{j 回目のみ不良品}]\\&=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\\&=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

に注意すれば求める確率は

$$1-\frac{1}{3}-\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

です。

(3) 丁度 4 回目に検査が終わるためには、不良品を○、良品を×として

○××○　×○×○　××○○

のように引かねばなりません。その確率は

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{15}$$

となります。

【解答例その２】検査が終わったあとも４回まで引くことを考えます。
(2) すべての結果のヴァリエーションは順番を考慮せずに ${}_{10}\mathrm{C}_4$ ありますが、そのうち不良品を２個含むものは良品のヴァリエーションで ${}_8\mathrm{C}_2$ だけあります。従って求める確率は

$$\frac{\frac{8\cdot7}{2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{2}{15}$$

です。

(3) 3 回目までに 1 個の不良品を引き、4 回目に 2 個目の不良品を引けば良いので、求める確率は

$$\frac{2\cdot{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{8\cdot7}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{1}{15}$$

です。 □

演習問題 15.6 ゲームを 1 回行うとき A と B の勝つ確率は 0.6 と 0.4 です。7 回戦で先に 4 勝した方が勝ちとし、以後の試合は行いません。次の確率を求めて下さい。
(1) ABAABA の順で勝つ確率。
(2) ちょうど 5 回で終了する確率。
(3) A が勝つ確率。

【解答例】(1)

$$0.6^4\cdot0.4^2=\frac{6^4\cdot4^2}{10^6}=\frac{324}{15625}\approx0.0207$$

(2) ちょうど 5 回で終わるのは

AAABA,　AABAA,　ABAAA,　BAAAA　それぞれ確率 $0.6^4\cdot0.4$

BBBAB,　BBABB,　BABBB,　ABBBB　それぞれ確率 $0.6\cdot0.4^4$

の順で勝った場合であり、その確率は

$$4\cdot\frac{6^4\cdot4+6\cdot4^4}{10^5}=\frac{168}{625}=0.2688$$

です。

(3) A が勝つのは 4 回目から 7 回目のいずれかであり、

$$
\begin{aligned}
P[\text{A が勝つ}] &= P[\text{A が 4 回目に勝つ}] + P[\text{A が 5 回目に勝つ}] \\
&\quad + P[\text{A が 6 回目に勝つ}] + P[\text{A が 7 回目に勝つ}] \\
&= 0.6^4 + {}_4\mathrm{C}_1 0.6^4 0.4 + {}_5\mathrm{C}_2 0.6^4 0.4^2 + {}_6\mathrm{C}_3 0.6^4 0.4^3 \\
&= 0.6^4 \left(1 + \frac{4^2}{10} + \frac{5\cdot4\cdot4^2}{2\cdot10^2} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot4^3}{3\cdot2\cdot10^3}\right) \\
&= \frac{6^4}{10^4}\left(1 + \frac{8}{5} + \frac{8}{5} + \frac{32}{25}\right) \\
&= \frac{3^4\cdot137}{5^6} \\
&\approx 0.7102
\end{aligned}
$$

が得られます。 □

15.2 練習問題 13

演習問題 15.7 3 個のさいころを振って出た目の和を W とします。W の確率分布表を作り、その平均値と分散を求めて下さい。

【解答例】W のとり得る値の範囲は 3 から 18 までですが、$l+m+n=k$ としたとき

$$
\begin{aligned}
21-(l+m+n) &= 21-k \\
(7-l)+(7-m)+(7-n) &= 21-k
\end{aligned}
$$

ですから、$l+m+n=k$ を満たす 1 から 6 の数の組 l,m,n の総数は、$l+m+n=21-k$ を満たす 1 から 6 の数の組 l,m,n の総数に等しいことが分かります。

従って 3 から 10 まで数えれば十分であることが分かります。

和	組み合わせ	順列の総数
3	111	1
4	112	3
5	113	3
	122	3

和	組み合わせ	順列の総数
6	114	3
	123	6
	222	1

和	組み合わせ	順列の総数
7	115	3
	124	6
	133	3
	223	3
8	116	3
	125	6
	134	6
	224	3
	233	3

和	組み合わせ	順列の総数
9	126	6
	135	6
	144	3
	225	3
	234	6
	333	1
10	136	6
	145	6
	226	3
	235	6
	244	3
	334	3

j	3	4	5	6	7	8	9	10
$P[W=j]$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{27}{6^3}$
j	11	12	13	14	15	16	17	18
$P[W=j]$	$\frac{27}{6^3}$	$\frac{25}{6^3}$	$\frac{21}{6^3}$	$\frac{15}{6^3}$	$\frac{10}{6^3}$	$\frac{6}{6^3}$	$\frac{3}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$

$$
\begin{aligned}
E[W] &= \frac{3\cdot1+4\cdot3+\cdots+17\cdot3+18\cdot1}{6^3} \\
&= \frac{(3+18)1+(4+17)3+\cdots+(10+11)27}{6^3} \\
&= \frac{21}{6^3}(1+3+\cdots+27) \\
&= \frac{21}{2} \\
Var[W] &= \frac{(3^2+18^2)1+(4^2+17^2)3+\cdots+(10^2+11^2)27}{6^3} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 \\
&= \frac{25704}{6^3} - \frac{21^2}{2^2} \\
&= \frac{35}{4}
\end{aligned}
$$

□

演習問題 15.8 トランプの 52 枚のカードから 2 枚のカードを引きます。スペードは 1 点、クラブは 2 点、ダイヤは 4 点、ハートは 8 点とし、2 枚のカードの点の積を X とします。X の確率分布と平均値を求めて下さい。

【解答例】X の値のとり得る値は 1、2、4、8、16、32、64 のみであり、

$$\begin{aligned}
P[X=1] &= P[\text{スペード 2 枚}] \\
&= \frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51} = \frac{3}{51} \\
P[X=2] &= P[\text{スペード 1 枚、クラブ 1 枚}] \\
&= \frac{13^2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{13}{102} \\
P[X=4] &= P[\text{スペード 1 枚、ダイヤ 1 枚　または　クラブ 2 枚}] \\
&= \frac{13}{102} + \frac{3}{51} = \frac{19}{102} \\
P[X=8] &= P[\text{スペード 1 枚、ハート 1 枚　または　クラブ 1 枚、ダイヤ 1 枚}] \\
&= \frac{13}{102} + \frac{13}{102} = \frac{26}{102} \\
P[X=16] &= P[\text{クラブ 1 枚、ハート 1 枚　または　ダイヤ 2 枚}] \\
&= \frac{13}{102} + \frac{3}{51} = \frac{19}{102} \\
P[X=32] &= P[\text{ダイヤ 1 枚、ハート 1 枚}] \\
&= \frac{13^2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{13}{102} \\
P[X=64] &= P[\text{ハート 2 枚}] \\
&= \frac{{}_{13}\mathrm{C}_2}{{}_{52}\mathrm{C}_2} = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51} = \frac{3}{51}
\end{aligned}$$

ですから確率分布表は以下の通りです：

j	1	2	4	8	16	32	64
$P[X=j]$	$\frac{6}{102}$	$\frac{13}{102}$	$\frac{19}{102}$	$\frac{26}{102}$	$\frac{19}{102}$	$\frac{13}{102}$	$\frac{6}{102}$

$$E[X] = (1+64)\frac{6}{102} + (2+32)\frac{13}{102} + (4+16)\frac{19}{102} + 8\frac{26}{102} = \frac{710}{51}$$

□

【なぜ対称に分布するのか？】

値のヴァリエーションは

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$$

であり、$0, 1, 2, \ldots, 6$ を $0, 1, 2, 3$ から重複を許してとった 2 つの数の和で書く方法は

$$\begin{aligned}
0 &= 0+0 & 6 &= 3+3 \\
1 &= 0+1 & 5 &= 2+3 \\
2 &= 0+2 & 4 &= 1+3 \\
&= 1+1 & &= 2+2 \\
3 &= 0+3 \\
&= 1+2
\end{aligned}$$

の通りであって、$l+m=k\,(k=0,1,\ldots,6)$ となる $l, m = 0,1,2,3$ の組み合わせの総数は

$$6-(l+m) = 6-k$$
$$(6-l)+(6-m) = 6-k$$

に注意すれば $l+m=6-k\,(k=0,1,\ldots,6)$ となる $l, m = 0,1,2,3$ の組み合わせの総数に一致しています。

演習問題 15.9 n 枚のカードに 1 から n までの数字が記入されています。任意に引いた 1 枚のカードの数を X とするとき、X の平均値と分散を求めて下さい。

【解答例】どの数も出る確率は $\frac{1}{n}$ ですから、

$$E[X] = 1\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n} + \cdots + n\cdot\frac{1}{n} = (1+2+\cdots+n)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}n(n+1)\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned}
Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 &= 1^2\frac{1}{n} + 2^2\frac{1}{n} + \cdots + n^2\frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - \frac{(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{1}{12}(n^2-1)
\end{aligned}$$

です。

□

演習問題 15.10 1 から 9 までの数字がそれぞれ書いてあるカードが 9 枚あります。この中から 3 枚のカードを取り出して書かれた数字の小さい方から順に X, Y, Z とします。

(1) X, Y, Z がすべて偶数である確率は幾らですか。

(2) X, Y, Z が連続した数字である確率は幾らですか。

(3) $1 \le k \le 7$ のとき確率 $P[X = k]$ を求めて下さい。

(4) X の平均値を求めて下さい。

【解答例】(1) 3 枚とり出すヴァリエーションの総数は ${}_9\mathrm{C}_3$ であり、そのうちすべて偶数であるものは ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ ですから求める確率は $\frac{4}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{21}$ です。

(2) 連続数であるヴァリエーションは 1.2.3 から 7.8.9 まで 7 通りありますから求める確率は $\frac{7}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{12}$ です。

(3) 3 枚とってその中の最小値が k であるようなヴァリエーションは、k より大きなもの $9-k$ 個の中から 2 つ選ぶ組み合わせの数 ${}_{9-k}\mathrm{C}_2$ だけありますから、

$$P[X = k] = \frac{{}_{9-k}\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3} = \frac{\frac{(9-k)(9-k-1)}{2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{(9-k)(8-k)}{168}$$

となります。

(4)

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{7} \frac{(9-k)(8-k)}{168} \\
&= \frac{1}{168}\sum_{k=1}^{7}(k^3 - 17k^2 + 72k) \\
&= \frac{1}{168}\left\{ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\Big|_{n=7} - \frac{17}{6}n(n+1)(2n+1)\Big|_{n=7} + \frac{72}{2}n(n+1)\Big|_{n=7} \right\} \\
&= \frac{784 - 2380 + 2016}{168} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

□

演習問題 15.11 客室数が 5 で、テニスコートを 3 面保有している民宿があります。各客室はコートの使用を確率 0.5 でおのおの独立に希望するとします。客室は毎日満室であって、コートは各客室で 1 日 1 面しか借りられないものとします。

(1) コート使用希望数が 3 室以上になる確率は幾らですか。

(2) 毎日のコート利用による総収入の期待値を 20000 円にするには、コート 1 面の 1 日使用料を幾らにすれば良いでしょうか。ただし、100 円未満は切り上げ、使用希望数が以上であるときには抽選で 3 面を貸すものとします。

【解答例】(1) コート利用希望が 0、1、2 部屋である確率は

$${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(1 + 5 + \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)\frac{1}{2^5} = \frac{1}{2}$$

ですから、求める確率は $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ です。

(2) コート利用希望数を表す確率変数を X とします。コート使用料を x 円に設定すると 1 日の収入の期待値 E は

$$\begin{aligned}
E &= 0P[X=0] + xP[X=1] + (2x)P[X=2] + (3x)P[X \ge 3] \\
&= 0\cdot{}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + x\cdot{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 + (2x){}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + (3x)\frac{1}{2} \\
&= \frac{5x}{2^5} + \frac{2x\frac{5\cdot4}{2\cdot1}}{2^5} + \frac{3x}{2} \\
&= \frac{x}{2^5}(5 + 20 + 3\cdot2^4) \\
&= \frac{73}{2^5}x
\end{aligned}$$

となりますから、これが 20000 円となれば良いので

$$\begin{aligned}
\frac{73}{2^5}x &= 20000 \\
x &\approx 8767
\end{aligned}$$

より、1 面の 1 日の使用料を 8800 円にすれば良いことが分かります。 □

演習問題 15.12 1 つのさいころを 30 回くり返し投げるとき、1 の目が r 回出る確率を p_r とします。
(1) $\dfrac{p_{r+1}}{p_r} > 1$ となる r の値を求めて下さい。
(2) p_r が最大となる r の値を求めて下さい。

【解答例】

$$p_r = {}_{30}\mathrm{C}_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{30-r}$$

(1)

$$\begin{aligned}\frac{p_{r+1}}{p_r} &= \frac{{}_{30}\mathrm{C}_{r+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{r+1}\left(\frac{5}{6}\right)^{30-r-1}}{{}_{30}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{6}\right)^r\left(\frac{5}{6}\right)^{30-r}} \\ &= \frac{\frac{30!}{(r+1)!(30-r-1)!}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{30!}{r!(30-r)!}\cdot\frac{5}{6}} \\ &= \frac{r!(30-r)!}{5(r+1)!(30-r-1)!} \\ &= \frac{30-r}{5(r+1)}\end{aligned}$$

ですから、

$$\frac{p_{r+1}}{p_r} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{30-r}{5(r+1)} > 1$$
$$30 - r > 5r + 5$$
$$\frac{25}{6} > r$$

であり、題意を満たす r は $r = 0, 1, 2, 3, 4$ です。

(2) 上の結果から p_5 が最大です。 □

15.3 入試から

演習問題 15.13 [2016 医師国家試験] ある疾患に罹患している検査前確率が 0.1 % と推測される患者に、感度 90 %、特異度 80 %の検査を行う。検査後確率を計算するための２×２表を示す。

検査結果＼疾患	有	無	合計
陽性	9	1998	2007
陰性	1	7992	7993
合計	10	9990	10000

検査が陽性だった場合の検査後確率（陽性的中率）で正しいのはどれか。

a　0.45%　　b　0.9%　　c　4.5%　　d　9.0%　　e　20.0%

ただし、感度とは、疾患ありの人が陽性と判定される確率であり、特異度とは、疾患なしの人が陰性と判定される確率を指すものとします。

$$P[\text{罹患} \mid \text{陽性}] = \frac{P[\text{罹患} \cap \text{陽性}]}{P[\text{陽性}]} = \frac{9}{2007} \approx 0.0044843$$

従って正しいものは a です。 □

演習問題 15.14 [2013 慶應大医] 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

２つの袋 A、B と、赤玉、白玉それぞれ 3 個ずつが用意されている。各々の袋の中に玉が 3 個ずつ入っている状態に対して次の操作を考える。

操作 T：各々の袋から玉を同時に無作為に 1 個ずつ取り出した後、袋 A から取り出した玉を袋 B の中に、袋 B から取り出した玉を袋 A に入れる。

いま、袋 A の中に赤玉 2 個と白玉 1 個が、袋 B の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている状態から始め、上記の操作を繰り返し行う。また n を自然数とし、n 回目の

操作を終えたときに袋 A の中に赤玉 3 個入っている確率を a_n、2 個だけ入っている確率を b_n、1 個だけ入っている確率を c_n とする。

(1) $a_1 = \boxed{（あ）}$、$b_1 = \boxed{（い）}$、$c_1 = \boxed{（う）}$である。

(2) $p_n = b_n + c_n$ と定義すると、p_{n+1} と p_n の間には

$$p_{n+1} = \boxed{（え）} \times p_n + \boxed{（お）}$$

という関係がある。また p_n を n の式で表すと $p_n = \boxed{（か）}$である。

(3) n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に入っている赤玉の個数の期待値を E_n とする。E_n を n の式で表すと $E_n = \boxed{（き）}$である。

(1)

$$a_1 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{A 白}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{B 赤}} = \frac{1}{9}$$

$$b_1 = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{A 白}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{B 白}} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{A 赤}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{B 赤}} = \frac{4}{9}$$

$$c_1 = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{A 赤}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{B 白}} = \frac{4}{9}$$

(2) n 回目の操作後に袋 A に赤玉が入っていない確率を d_n とします。

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \cdot 0 + b_n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + c_n \cdot 0 + d_n \cdot 0 \\
&= \frac{1}{9} b_n \\
b_{n+1} &= a_n \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} + b_n \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + c_n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + dn \cdot 0 \\
&= a_n + \frac{4}{9} b_n + \frac{4}{9} c_n \\
c_{n+1} &= a_n \cdot 0 + b_n \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + c_n \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + d_n \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \\
&= \frac{4}{9} b_n + \frac{4}{9} c_n + d_n \\
d_{n+1} &= a_n \cdot 0 + b_n \cdot 0 + c_n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + d_n \cdot 0 \\
&= \frac{1}{9} c_n
\end{aligned}$$

すると、

$$b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{8}{9}(b_n + c_n) + a_n + d_n$$

ですが、$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ であるため、

$$\begin{aligned}
b_{n+1} + c_{n+1} &= \frac{8}{9}(b_n + c_n) + 1 - (b_n + c_n) \\
p_{n+1} &= -\frac{1}{9} p_n + 1 \quad \cdots (*)
\end{aligned}$$

が得られます。

定数列 $g_n = k$ がこの漸化式を満たすと仮定すると

$$\begin{aligned}
k &= -\frac{k}{9} + 1 \\
k &= \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{9}{10} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} + 1 \quad \cdots (**)$$

ですから、$(*), (**)$ の２式を辺々引けば

$$p_{n+1} - \frac{9}{10} = -\frac{1}{9} \left(p_n - \frac{9}{10} \right)$$

となり、数列 $\left\{ p_n - \frac{9}{10} \right\}$ は公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列です。初項は

$$p_1 - \frac{9}{10} = b_1 + c_1 - \frac{9}{10} = \frac{8}{9} - \frac{9}{10} = -\frac{1}{90}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
p_n - \frac{9}{10} &= -\frac{1}{90} \left(-\frac{1}{9} \right)^{n-1} \\
p_n &= -\frac{1}{90} \frac{1}{9^{n-1}} + \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

です。

a_n, b_n, c_n, d_n が全て求まればそれに越したことはないでしょうが、４つも求めるのは大変そうです。(3) で b_n, c_n あたりの話は出てきていますが、a_n, d_n はどうしましょうか・・・
素直に期待値のなす数列の漸化式を見てみると結果オーライです。

(3)

$$\begin{aligned}
3a_{n+1}+2b_{n+1}+c_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n + 2\left(a_n+\frac{4}{9}b_n+\frac{4}{9}c_n\right)+\left(\frac{4}{9}b_n+\frac{4}{9}c_n+d_n\right)\\
&= 2a_n+\frac{15}{9}b_n+\frac{12}{9}c_n+d_n\\
&= a_n+\frac{5}{3}b_n+\frac{4}{3}c_n+1-(b_n+c_n)\\
&= a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n+1\\
&= \frac{1}{3}(3a_n+2b_n+c_n)+1\\
E_{n+1} &= \frac{1}{3}E_n+1
\end{aligned}$$

であり、

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}+1$$

と辺々引けば

$$E_n-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(E_n-\frac{3}{2}\right)$$

ですから、数列 $\left\{E_n-\frac{3}{2}\right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列です。初項は

$$E_1=3a_1+2b_1+c_1=\frac{1}{3}+\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

ですから、結局、

$$E_n=\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2\cdot 3^n}+\frac{3}{2}$$

です。

【a_n, b_n, c_n, d_n を全て求めるご苦労さんな解法その２】

(2) で b_n+c_n を求めたので、これはひょっとして、b_n-c_n も求まって、結果 b_n, c_n が分かるのではないか、と考えられるかどうか、そのような経験があるかどうかがポイントでしょうか。

(3)

$$b_{n+1}-c_{n+1}=a_n-d_n$$

ですが、この a_n-d_n は・・・じゃあちょっとこっちも計算してみますか

$$a_{n+1}-d_{n+1}=\frac{1}{9}(b_n-c_n)$$

あ、なるほど。そうなってるんですね。入れ子です。３項間の漸化式にすれば

$$b_{n+2}-c_{n+2}=\frac{1}{9}(b_n-c_n)$$

というわけです。初項を見てみましょうか。

$$b_1-c_1=0,\qquad b_2-c_2=\left\{a_1+\frac{4}{9}(b_1+c_1)\right\}-\left\{\frac{4}{9}(b_1+c_1)+d_1\right\}=\frac{1}{9}$$

ですね。従って $q_n=b_n-c_n$ と置けば、

$$q_n=\begin{cases}0 & n\text{ が奇数}\\ \frac{1}{3^n} & n\text{ が偶数}\end{cases}$$

です。
いまのところ、

$$b_n+c_n=-\frac{1}{90}\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{9}{10},\qquad b_n-c_n=\begin{cases}0 & n\text{ が奇数}\\ \frac{1}{3^n} & n\text{ が偶数}\end{cases}$$

ですが、

$$a_n+d_n=1-b_n-c_n=\frac{1}{90}\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{10},\qquad a_n-d_n=b_{n+1}-c_{n+1}=\begin{cases}0 & n\text{ が偶数}\\ \frac{1}{3^{n+1}} & n\text{ が奇数}\end{cases}$$

も分かっています。これで一応全て分かったことになりますね（場合分けが厄介ですが）。 □

演習問題 15.15 [2016 阪大編入] さいころを振って 3 以上の目が出たら 4 点を、2 以下の目が出たら 1 点を得るゲームを行います。さいころを n 回振った時までに得た得点の合計が偶数である確率を P_n とします（ただし、n は非負整数、$P_0 = 1$ とします)。このとき以下の問いに答えてください。
(1) P_1, P_3 を求めてください。
(2) P_{n+1} を P_n で表してください。
(3) P_n を求めてください。

n 回目の得点を表す確率変数を S_n とします。

(1)

$$P_1 = P[S_1 = 4] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

３回目までの合計点が偶数である場合は、３回の得点が『1 点が２回、4 点が１回である場合』（タイプ３）と、『4 点が３回の場合』（タイプ４）のいずれかであり、タイプ３は 4 点が何回目に出たかによって３通りあり、全て同じ確率ですから

$$\begin{aligned}
P_3 &= P[S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 4] \cdot 3 + P[S_1 = S_2 = S_3 = 4] \\
&= P[S_1 = 1]P[S_2 = 1]P[S_3 = 4] \cdot 3 + P[S_1 = 4]P[S_2 = 4]P[S_3 = 4] \\
&= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot 3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 \\
&= \frac{6+8}{3^3} \\
&= \frac{14}{27}
\end{aligned}$$

です。

(2) $n+1$ 回目までの合計点が偶数であるのは、n 回目までの合計点が偶数であって $n+1$ 回目の得点も偶数である場合と、n 回目までの合計点が奇数であって $n+1$ 回目の得点も奇数である場合に分けられます。従って

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= P_n P[S_{n+1} = 4] + (1 - P_n)P[S_{n+1} = 1] \\
&= \frac{2}{3}P_n + (1 - P_n)\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

が得られます（$n \geq 1$)。

(3)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

に注意して漸化式から辺々引けば

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

が成り立っています。ここで $Q_n = P_n - \frac{1}{2}$ と置けば、$\{Q_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は初項 $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列ですから、

$$\begin{aligned}
Q_n &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
P_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\
P_n &= \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{-n} + 1) \quad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

であることが分かります。 □