15　総復習・2 項分布

15.1　独立な確率変数

2 つの単純確率変数 $X=\sum_{j=1}^{n} x_j 1_{\{X=x_j\}}$, $Y=\sum_{k=1}^{m} y_k 1_{\{Y=y_k\}}$ が任意の j,k に対して次式を満たすとき、X,Y は独立であると言います：

$$P[X=x_j,\, Y=y_k]=P[X=x_j]P[Y=y_k].$$

15.1.1　独立な確率変数の積の期待値

事実 15.1.1 X,Y：独立　$E[XY]=E[X]E[Y].$

15.1.2　独立な確率変数の和の分散

事実 15.1.2 X,Y：独立　$Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y].$

15.2　２項分布

1 回の試行で事象 A の起きる確率が p（$q=1-p$）である様な試行を、独立に n 回繰り返した時に事象 A が起きた回数を確率変数 X とする。

j	0	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n
$P[X=j]$	q^n	npq^{n-1}	${}_n\mathrm{C}_2 p^2 q^{n-2}$	$\cdots$	${}_n\mathrm{C}_j p^j q^{n-j}$	$\cdots$	p^n

このような分布を２項分布（binomial distribution）$B(n,p)$ と言います。

15.3　２項分布の平均・分散

事実 15.3.1 X：２項分布 $B(n,p)$　$E[X]=np,\quad Var[X]=npq.$

演習問題 15.1 [教科書　問題 13.6] 次の２項分布に従う確率変数の平均値と分散を求めて下さい。
(1) $B(10,0.5)$　(2) $B(5,0.2)$　(3) $B(100,0.1)$

問題 15.3.2 [教科書　例題 13.1　改題] 次の確率変数の確率分布表とヒストグラム（棒グラフ）を作って下さい。
(1) 1 個のさいころを 4 回繰り返して投げるとき、6 の目の出る回数 X。
(2) 8 枚の硬貨を同時に投げるとき、表の出る枚数 Y。

【解答例】(1) X は２項分布 $B\left(4,\frac{1}{6}\right)$ に従いますから $P[X=k]={}_4\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ です。

k	0	1	2	3	4
$P[X=k]$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$ ≈ 0.482	${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ≈ 0.386	${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ≈ 0.116	${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)$ ≈ 0.015	$\left(\frac{1}{6}\right)^4$ ≈ 0.001

(2) 確率変数 Y は２項分布 $B\left(8,\frac{1}{2}\right)$ に従います：$P[Y=j]={}_8\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

j	0	1	2	3	4
$P[Y=j]$	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{{}_8\mathrm{C}_4}{2^8}$ ≈ 0.273
j	5	6	7	8	
$P[Y=j]$	$\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{2^8}$ ≈ 0.219	$\frac{{}_8\mathrm{C}_6}{2^8}$ ≈ 0.109	$\frac{8}{2^8}$ ≈ 0.031	$\frac{1}{2^8}$ ≈ 0.004	

ヒストグラムは略。 □

演習問題 15.2 [教科書　問題 13.5] ２項分布 $B(10,0.5), B(5,0.2)$ の確率分布表を作り、ヒストグラムを描いて下さい。

15.4　練習問題 12

演習問題 15.3 ある人が 3 つの課題 A、B、C に成功する確率は、それぞれ 0.5、0.6、0.7 です。これら 3 つの課題に挑んだとき、少なくとも 1 つに成功する確率を求めて下さい。

演習問題 15.4 白玉 6 個、赤玉 4 個、黒玉 2 個が入っている袋から同時に 4 個の玉を取り出すとき、次の確率を求めて下さい。
(1) 白玉が 2 個で赤玉と黒玉が 1 個ずつである確率。
(2) 白玉 2 個、赤玉 2 個である確率。　(3) 赤玉が 2 個以上含まれている確率。

演習問題 15.5 白玉と赤玉が 5 個ずつ計 10 個入った箱があります。いま任意に 1 個を取り出して、白玉ならば箱に戻さず、赤玉ならば箱に戻して良くかき混ぜて次の 1 個を取り出します。この操作を繰り返すとき次の確率を求めて下さい。
(1) 2 回目が白玉である確率。　(2) 2 回目と 3 回目がともに白玉である確率。

演習問題 15.6 正 5 角形 $ABCDE$ の頂点を、A から出発して $B, C, \ldots$ の順に左まわりに移動する点 P があります。さいころを振って出た目の数だけ P を移動することにし、k 回目に進んだ点の位置を P_k とします。たとえば 1 回目に 3、2 回目に 2、3 回目に 1 が出たときは、$P_1 = D, P_2 = A, P_3 = B$ です。そのとき次の確率を求めて下さい。
(1) $P_1 = P_2$ となる確率。　(2) P_1 と P_2 が隣り合う確率。
(3) $P_2 = A$ となる確率。　(4) P_1 または P_2 が A となる確率。
(5) $P_3 = A$ となる確率。　(6) P_1, P_2, P_3 がすべて異なる確率。

演習問題 15.7 2 個の不良品を含んだ製品 10 個があります。いま 1 個ずつ取り出して検査を行い、2 個の不良品を見つけたときこの検査は終わるものとします。次の確率を求めて下さい。
(1) 2 回で検査が終わる確率。　(2) 4 回までに検査が終わる確率。
(3) ちょうど 4 回で検査が終わる確率。

演習問題 15.8 ゲームを 1 回行うとき A と B の勝つ確率は 0.6 と 0.4 です。7 回戦で先に 4 勝した方が勝ちとし、以後の試合は行いません。次の確率を求めて下さい。
(1) ABAABA の順で勝つ確率。　(2) ちょうど 5 回で終了する確率。
(3) A が勝つ確率。

15.5　練習問題 13

演習問題 15.9 3 個のさいころを振って出た目の和を W とします。W の確率分布表を作り、その平均値と分散を求めて下さい。

演習問題 15.10 トランプの 52 枚のカードから 2 枚のカードを引きます。スペードは 1 点、クラブは 2 点、ダイヤは 4 点、ハートは 8 点とし、2 枚のカードの点の積を X とします。X の確率分布と平均値を求めて下さい。

演習問題 15.11 n 枚のカードに 1 から n までの数字が記入されています。任意に引いた 1 枚のカードの数を X とするとき、X の平均値と分散を求めて下さい。

演習問題 15.12 1 から 9 までの数字がそれぞれ書いてあるカードが 9 枚あります。この中から 3 枚のカードを取り出して書かれた数字の小さい方から順に X, Y, Z とします。
(1) X, Y, Z がすべて偶数である確率は幾らですか。
(2) X, Y, Z が連続した数字である確率は幾らですか。
(3) $1 \leq k \leq 7$ のとき確率 $P[X = k]$ を求めて下さい。
(4) X の平均値を求めて下さい。

演習問題 15.13 客室数が 5 で、テニスコートを 3 面保有している民宿があります。各客室はコートの使用を確率 0.5 でおのおの独立に希望するとします。客室は毎日満室であって、コートは各客室で 1 日 1 面しか借りられないものとします。
(1) コート使用希望数が 3 室以上になる確率は幾らですか。
(2) 毎日のコート利用による総収入の期待値を 20000 円にするには、コート 1 面の 1 日使用料を幾らにすれば良いでしょうか。ただし、100 円未満は切り上げ、使用希望数が以上であるときには抽選で 3 面を貸すものとします。

演習問題 15.14 1 つのさいころを 30 回くり返し投げるとき、1 の目が r 回出る確率を p_r とします。
(1) $\dfrac{p_{r+1}}{p_r} > 1$ となる r の値を求めて下さい。
(2) p_r が最大となる r の値を求めて下さい。

15.6　R06 年度　定期試験

問題 1 ガルーラというキャラクターの『ピヨピヨパンチ』という技は、

1 回の攻撃機会において、コインを 3 回投げて、(表の枚数) × 10 のダメージ

を相手に与えます。

(1) ガルーラが 1 回の攻撃機会において『ピヨピヨパンチ』によって相手に与えるダメージを X として、X の確率分布表を書いてください。
(2) X の平均と分散を求めてください。

問題 2 40 人のクラスで、微分方程式の単位を落とした学生は 5 人、確率の単位を落とした学生は 3 人、両方単位を取得した学生は 34 人でした。このクラスで微分方程式と確率の両方の単位を落とした学生は何人ですか。

問題 3 (1) 8 を正の奇数の和で表す方法は何通りありますか。
ただし $1 + 1 + 1 + 3 + 3$ のように同じ奇数を何度使っても良く、足す順番は無視します。
(2) 8 を相異なる正の整数の和で表す方法は何通りありますか。ただし、『1 個の和 $8 = 8$』も和として認めることとし、足す順番は無視します。

問題 4 $\left(3x + \frac{1}{2}\right)^{50}$ の展開式について以下の問いに答えてください。
(1) 展開した時の x^j の係数を 2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_m$ を使って表してください。
(2) 展開した時の係数のうち、最も大きいものは x の何乗の係数ですか。係数そのものを求める必要はありません。

問題 5 5 つの玉を 3 つの箱に入れる入れ方の総数は何通りあるか次のそれぞれの場合に答えて下さい。ただし、玉が 1 つも入らない箱があっても構いませんが、どの箱にも 3 個までしか入らないものとします。
(1) 玉に区別はないが、箱には区別がある場合。
(2) 玉は区別されるが、箱に区別は無い場合。

問題 6 大小２つのサイコロを 1 回振ったときの大サイコロの出目を L、小サイコロの出目を S とします。
(1) L を 3 で割った余りが 0、1、2 である確率をそれぞれ求めてください。
(2) L, S それぞれを 3 で割った余りが等しい確率を求めてください。
(3) $2L + S$ が 3 の倍数である確率を求めてください。

問題 7 新型コロナウイルス感染症に対して PCR 検査をすると、感染者が陽性と判定される確率（感度）は 70%です。一方、非感染者が陰性と判定される確率（特異度）は 99%です。また、今回問題となっている母集団における感染者の割合は $\frac{1}{5000}$ であると考えられています。

この母集団から無作為に選ばれた A さんが、PCR 検査により陽性と判定されました。このとき、A さんが新型コロナウイルスに感染している確率を求めてください。

15.7　H31 年度　定期試験

問題 15.7.1 40 人のクラスで、微分方程式の単位を落とした学生は 12 人、確率の単位を落とした学生は 19 人、両方単位を取得した学生は 19 人でした。このクラスで微分方程式と確率の両方の単位を落とした学生は何人ですか。

問題 15.7.2 7 を正の整数の和で書き表す方法は何通りありますか。ただし、『１個の和』も認めるものとし、足す順番は無視することにします。

問題 15.7.3 $\left(2x + \frac{1}{3}\right)^{30}$ の展開式について以下の問いに答えてください。
(1) 展開した時の x^j の係数を２項係数 ${}_n\mathrm{C}_m$ を使って表してください。
(2) 展開した時の係数のうち、最も大きいものは x の何乗の係数ですか。係数そのものを求める必要はありません。

問題 15.7.4 4 つの玉を 3 つの箱に入れる入れ方の総数は何通りあるか次のそれぞれの場合に答えて下さい。ただし、玉が 1 つも入らない箱があっても構いませんが、どの箱にも 3 個までしか入らないものとします。
(1) 玉にも箱にも区別が無い場合。
(2) 玉にはそれぞれ異なった色が塗られていて区別されるが、箱に区別は無い場合。

問題 15.7.5 ある会社は、A、B 社から同じ部品を 2：5 の比率で購入しています。A、B 社から納入された部品にはそれぞれ 2.5 %、1 %の割合で不良品が含まれていることが知られています。
このとき納入された部品全体から任意に取り出した 1 個が不良品である確率を求めてください。

問題 15.7.6 コインを 3 回投げて表の出た回数を X、表の出た回数と裏の出た回数の差の絶対値を Y とします。
(1) X の分布表を書いて下さい。ただし確率の欄は全て既約分数（もう約分できない状態まで約分した分数）で書いてください。
(2) XY の期待値と分散を求めて下さい。

問題 15.7.7 A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 3 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

問題 15.7.8 箱の中に赤玉が 2 個、白玉が 7 個入っています。A さんと B さんが、A さんから始めて交互に１つの玉を取り出して元に戻します。
先に赤玉を出した人の勝ちであるとして、B さんが勝つ確率を求めてください。

15.8　H30 年度　定期試験

問題 15.8.1 あるクラスの 40 人の学生のうち、数学が嫌いな学生が 22 人おり、数学も英語も好きな学生が 9 人、数学も英語も嫌いな学生が 8 人いました。では英語が好きな学生は何人いるでしょうか。ただし、各学生は数学・英語それぞれについて好きか嫌いであるかのどちらかであると仮定します。

問題 15.8.2 (1) 10 を互いに異なる正の整数の和で表す方法は何通りありますか。
(2) 12 を 5 で割って余りが ± 1 であるような正の整数（1,4,6,9,11）の和で表す方法は何通りありますか。

問題 15.8.3 $\left(2x^5 + \frac{3}{x^2}\right)^n$ を展開した時に x^{11} が存在するような正の整数 n の最小値を求め、その時の x^{11} の係数を求めて下さい。

問題 15.8.4 袋の中に白玉が４個と黒玉が５個入っています。ここから３個取り出すとき、３つとも同じ色である確率を求めて下さい。

問題 15.8.5 ある工場では従業員の 75 %が男性で、男性のうち 40 %の人が社宅に住み、女性の中の 20 %の人が社宅に住んでいます。社宅に住んでいる従業員の中からくじで 1 名選ぶとき、その従業員が男性である確率を求めて下さい。

問題 15.8.6 箱の中にくじが 6 枚入っていて、そのうち 2 枚が当たりです。１枚ずつくじを引いてゆく（引いたくじは戻しません）ゲームをし、2 枚目の当たりが出たらゲームを終わりとします。
ゲームが終了するまでに引いたくじの枚数を表す確率変数を X とするとき、X の期待値と分散を求めて下さい。

問題 15.8.7 A の袋には白玉 1 個と黒玉 5 個が、B の袋には黒玉 4 個が入っています。それぞれの袋から同時に 2 個ずつ取って入れかえる操作を繰り返します。この操作を n 回繰り返した後に A の袋に白玉が入っている確率 P_n を求めて下さい。

問題 15.8.8 1 から 9 までの数字がそれぞれ書いてあるカードが 9 枚あります。この中から 3 枚のカードを取り出して書かれた数字の小さい方から順に X, Y, Z とします。
(1) X, Y, Z が連続した数字である確率は幾らですか。
(2) 確率 $P[X = 5]$ を求めて下さい。

15.9　H29 年度　定期試験

問題 15.9.1 (1) 全体集合を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ とし、

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

とするとき、集合 $A\cap B,\ A\cup B,\ A\cap\overline{B}$ を求めて下さい。

(2) 集合 C, D について

$$C\cup D=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$
$$C\cap D=\{2,3,6\},\quad C\cap\overline{D}=\{1,8\}$$

であるとき、C, D を求めて下さい。

問題 15.9.2 7 個の数字 1,1,1,2,2,3,3 を全部使って並べてできる 7 桁の整数は何個ありますか。

問題 15.9.3 $(2x-1)^7$ の展開式で x^4 の係数を求めて下さい。

問題 15.9.4 袋の中に白玉 6 個、赤玉 4 個が入っています。この中から同時に 5 個取り出すとき、3 個が白玉、2 個が赤玉である確率を求めて下さい。

問題 15.9.5 ある工場で 2 種類の機械 A、B を使って同じ製品を作っています。A と B の生産の割合は 3：2 であり、不良品の出る率はそれぞれ 4 %、5 %です。

任意に 1 個の不良品を選んだときそれが機械 A による製品である確率、つまり、不良品であると云う条件の下での機械 A による製品である確率を求めて下さい。

問題 15.9.6 (1) 次の確率分布表に従う確率変数 X の平均値・分散を求めて下さい。

k	1	2	3	4
$P[X=k]$	0.4	0.3	0.2	0.1

(2) 2 項分布 $B(4,0.5)$ の確率分布表を書いて下さい。

問題 15.9.7 2 つの事象 A, B について、A と B が互いに独立であれば、A と $\overline{B}$ も互いに独立であることを証明して下さい。

問題 15.9.8 1 つの箱に赤玉 4 個と白玉 5 個が入っています。A、B 2 人が A から始めて交互に箱の中から玉を 1 つ取り出し、先に白玉を取り出した者を勝ちとするとき、A の勝つ確率を求めて下さい。ただし、非復元抽出とします。

15.10 入試から

演習問題 15.15 [2024 医師国家試験 (改)] 患者の大腸に何らかの病変がある検査前確率（事前確率）を 20 %としたとき、便潜血反応陽性であった場合の検査後確率に最も近いのはどれか。ただし、便潜血反応の感度は 80 %、特異度は 90 %とする。

a 33% b 53% c 57% d 67% e 97%

ただし、感度とは、病変ありの人が便潜血反応陽性と判定される確率であり、特異度とは、病変なしの人が便潜血反応陰性と判定される確率を指すものとします。

演習問題 15.16 [2013 慶應大医] 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

2 つの袋 A、B と、赤玉、白玉それぞれ 3 個ずつが用意されている。各々の袋の中に玉が 3 個ずつ入っている状態に対して次の操作を考える。

> 操作 T：各々の袋から玉を同時に無作為に 1 個ずつ取り出した後、袋 A から取り出した玉を袋 B の中に、袋 B から取り出した玉を袋 A に入れる。

いま、袋 A の中に赤玉 2 個と白玉 1 個が、袋 B の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている状態から始め、上記の操作を繰り返し行う。また n を自然数とし、n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に赤玉 3 個入っている確率を a_n、2 個だけ入っている確率を b_n、1 個だけ入っている確率を c_n とする。

(1) $a_1=$ （あ）、$b_1=$ （い）、$c_1=$ （う） である。

(2) $p_n=b_n+c_n$ と定義すると、p_{n+1} と p_n の間には

$$p_{n+1}=\boxed{（え）}\times p_n+\boxed{（お）}$$

という関係がある。また p_n を n の式で表すと $p_n=$ （か） である。

(3) n 回目の操作を終えたときに袋 A の中に入っている赤玉の個数の期待値を E_n とする。E_n を n の式で表すと $E_n=$ （き） である。

演習問題 15.17 [2016 阪大編入] さいころを振って 3 以上の目が出たら 4 点を、2 以下の目が出たら 1 点を得るゲームを行います。さいころを n 回振った時までに得た得点の合計が偶数である確率を P_n とします（ただし、n は非負整数、$P_0=1$ とします）。このとき以下の問いに答えてください。

(1) P_1, P_3 を求めてください。
(2) P_{n+1} を P_n で表してください。
(3) P_n を求めてください。

演習問題 15.18 [2024 東大編入] 白玉が 3 個、赤玉が 3 個の合計 6 個の玉がある。6 個の玉から無作為に 3 個を選び箱 A に入れ、残りの 3 個を箱 B に入れる。この状態を初期状態とする。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。非負の整数 n に対して確率 P_n, Q_n, R_n, S_n を、この試行を n 回繰り返したときに箱 A に白玉がそれぞれ 3 個、2 個、1 個、0 個入っている確率を表すものとする。ただし、$n=0$ のときは交換を行う前の初期状態を表す。

(1) 初期状態の確率 P_0, Q_0, R_0, S_0 を求めよ。
(2) $P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}, S_{n+1}$ を P_n, Q_n, R_n, S_n で表せ。
(3) 1 回目の試行の後に箱 A の白玉が 2 個あったときに、初期状態で箱 A に白玉が 2 個入っていた確率を求めよ。
(4) 初期状態で白玉が 3 個とも箱 A に入っていた場合を考える。$X_n=Q_n+R_n, Y_n=Q_n-R_n$ とおく。
 (a) X_n を求めよ。
 (b) Y_n を求めよ。
 (c) Q_n を求めよ。
 (d) 試行を無限回繰り返したときに箱 A に入っている白玉の個数の期待値を求めよ。