問題 1 ある金属棒の製品１０個の長さを測定して次の値（単位 cm）を得ました。この長さの平均値・分散を求めて下さい。

$$2.99 \quad 3.00 \quad 3.00 \quad 2.98 \quad 3.00 \quad 3.00 \quad 3.02 \quad 3.00 \quad 2.98 \quad 3.03$$

配点：２０点	シラバス達成度目標：ア

解答例

$$\text{（平均値）} = \frac{2.99 + 3.00 + \cdots + 3.03}{10} = \frac{30.00}{10} = 3.00$$

$$\begin{aligned} \text{（分散）} &= \frac{(2.99-3.00)^2 + (3.00-3.00)^2 + \cdots + (3.03-3.00)^2}{10} \\ &= \frac{0.01^2 + 0.02^2 + 0.02^2 + 0.02^2 + 0.03^2}{10} \\ &= \frac{0.0022}{10} \\ &= 0.00022 \end{aligned}$$

問題 2 次の表は５本のパイナップルの木について、幹の周囲 X と高さ Y を測定したものです（単位メートル）。

X	0.75	0.55	0.72	0.61	0.66
Y	8.7	6.8	7.9	7.0	7.1

（１）X, Y の平均値、X の分散、X, Y の共分散を求めて下さい。
（２）Y の X への回帰直線の方程式が

$$y - E[Y] = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$$

となることを使って、幹の周囲が 0.80m の木の高さを推測して下さい。

配点：（１）２０点、（２）５点	シラバス達成度目標：イ、オ

解答例　（１）

$$E[X] = \frac{0.75 + 0.55 + 0.72 + 0.61 + 0.66}{5} = \frac{3.29}{5} = 0.658$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \frac{0.75^2 + 0.55^2 + 0.72^2 + 0.61^2 + 0.66^2}{5} - \left(\frac{3.29}{5}\right)^2 \\ &= \frac{2.1911}{5} - \frac{10.8241}{5^2} \\ &= \frac{0.1314}{25} \\ &= 0.005256 \end{aligned}$$

$$E[Y] = \frac{8.7+6.8+7.9+7.0+7.1}{5} = \frac{37.5}{5} = 7.5$$

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= \frac{0.75\cdot 8.7 + 0.55\cdot 6.8 + 0.72\cdot 7.9 + 0.61\cdot 7.0 + 0.66\cdot 7.1}{5} - \frac{3.29}{5}\cdot\frac{37.5}{5} \\ &= \frac{24.90900}{5} - \frac{123.375}{25} \\ &= \frac{1.17}{25} \\ &= 0.0468 \end{aligned}$$

（２）Y の X への回帰直線の方程式は

$$\begin{aligned} y - E[Y] &= \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X]) \\ y - \frac{37.5}{5} &= \frac{\frac{1.17}{25}}{\frac{0.1314}{25}}\left(x - \frac{3.29}{5}\right) \\ y &= \frac{1.17}{0.1314}\left(x - \frac{3.29}{5}\right) + \frac{37.5}{5} \end{aligned}$$

となるので、これに $x = 0.80$ を代入すれば

$$\begin{aligned} y &= \frac{1.17}{0.1314}\left(0.80 - \frac{3.29}{5}\right) + \frac{37.5}{5} \\ &= \frac{1.17\cdot 0.71 + 37.5\cdot 0.1314}{0.1314\cdot 5} \\ &= \frac{5.7582}{0.657} \\ &\sim 8.764 \\ &\sim 8.8 \end{aligned}$$

となります。従って幹の周囲が 0.80 の時の木の高さは大体 $8.8m$ と推測されます。

問題 3 確率変数 H の分布密度関数が次の $h(x)$ で与えられているとします：

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

（１）確率 $P[0.5 \le H \le 2]$、平均値 $E[H]$ を求めて下さい。

（２）確率変数 $3H-1$ の分布密度関数を求めて下さい。

配点：（１）２０点、（２）５点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　（１）

$$P[0.5 \le H \le 2] = \int_{0.5}^{1} 2x dx = [x^2]_{0.5}^{1} = \frac{3}{4}$$

$$E[H] = \int_0^1 x\cdot 2x dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

（２）

$$\begin{aligned} P[3H-1 \le t] = P\left[H \le \frac{t+1}{3}\right] &= \int_{-\infty}^{\frac{t+1}{3}} h(y)dy \\ &= \begin{cases} 0 & \frac{t+1}{3} \le 0 \\ \int_0^{\frac{t+1}{3}} 2ydy & 0 \le \frac{t+1}{3} \le 1 \\ 1 & 1 \le \frac{t+1}{3} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t \le -1 \\ \int_{-1}^{t} \frac{2(x+1)}{9} dx & -1 \le t \le 2 \\ 1 & 2 \le t \end{cases} \end{aligned}$$

なので、求める密度関数は

$$\begin{cases} \frac{2}{9}(x+1) & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

です。

問題 4 確率変数 R が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.209$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例

$$\begin{aligned} 0.209 &= P[R \leq w] \\ &= P[N(5,4) \leq w] \\ &= P\left[N(0,1) \leq \frac{w-5}{2}\right] \end{aligned}$$

ですが、この確率が 0.5 未満であるため、$\frac{w-5}{2}$ は負の数であり、

$$\begin{aligned} &= P\left[\frac{5-w}{2} \leq N(0,1)\right] \\ &= 0.5 - P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{5-w}{2}\right] \\ 0.291 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{5-w}{2}\right] \end{aligned}$$

となって、正規分布表より

$$\frac{5-w}{2} \sim 0.81 \qquad w \sim 3.38$$

が得られます。

問題 5 平成２３年度大学入試センター試験・英語の受験者数は５０万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 122.8、標準偏差（分散の正の平方根）が 41.2 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。

得点が 170 点だった受験者の順位はだいたい何番くらいでしょうか。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例　得点を表す確率変数 X は正規分布 $N(122.8, 41.2^2)$ に従っています。すると求めるべきものは 171 点以上の人が何人いるかであり、それは $P[170 < X]$ を求め、これに 500000 を掛ける事によって概算出来ます。これは

$$\begin{aligned} P[170 < X] &= 1 - P[X \leq 170] \\ &= 1 - P[X - 122.8 \leq 170 - 122.8] \\ &= 1 - P\left[\frac{X-122.8}{41.2} \leq \frac{47.2}{41.2}\right] \\ &\sim 1 - P[N(0,1) \leq 1.146] \\ &\sim 1 - (P[-\infty < N(0,1) < 0] + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.146]) \\ &\sim 1 - (0.5 + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.15]) \end{aligned}$$

ですから正規分布表から

$$\begin{aligned} &= 0.5 - 0.3749 \\ &= 0.1251 \end{aligned}$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.1251 = 62550$$

が分かります。171 点以上の人が大体これだけ居ますから 170 点の人は大体 62550 番程度であると考えられます。