

問題 1 次のデータの平均値と分散を求めて下さい：

10 8 13 9 11 14 6 4 12 7 5

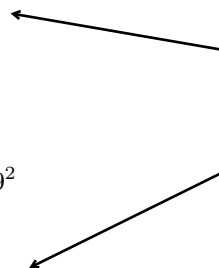
配点：20点 シラバス達成度目標：ア

【解答例】

$$\begin{aligned} (\text{平均値}) &= \frac{10 + 8 + 13 + 9 + 11 + 14 + 6 + 4 + 12 + 7 + 5}{11} \\ &= \frac{99}{11} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{分散}) &= \frac{10^2 + 8^2 + \cdots + 5^2}{11} - 9^2 \\ &= \frac{1001}{11} - 9^2 \\ &= 91 - 81 \\ &= 10 \end{aligned}$$

平均値・分散、各10点
計算ミスはそれぞれ -3点



A 少しの計算のみ 3点

B ある程度意味のある計算が出来ている 6点

問題 2 分散が0でない有限データ $X : x_1, \dots, x_{10}$ と、 X から得られた派生データ $Y = 3X + 5$ ：

$$Y : 3x_1 + 5, \dots, 3x_{10} + 5$$

に対して、相関係数 $Cor[X, Y]$ が1となる事を証明して下さい。

配点：10点 シラバス達成度目標：イ

【解答例】 Y の分散は

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[3X + 5] = \sum_{j=1}^{10} (3x_j + 5 - E[3X + 5])^2 \\ &= \sum_{j=1}^{10} (3x_j + 5 - 3E[X] - 5)^2 \\ &= 9 \sum_{j=1}^{10} (x_j - E[X])^2 \\ &= 9Var[X] \end{aligned}$$

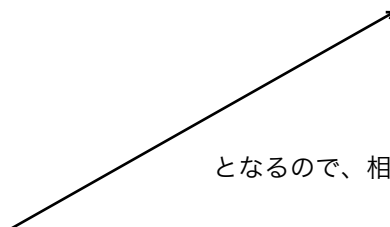
であり、また X と Y の共分散は

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= Cov[X, 3X + 5] = \sum_{j=1}^{10} (x_j - E[X])(3x_j + 5 - E[3X + 5]) \\ &= 3 \sum_{j=1}^{10} (x_j - E[X])^2 \\ &= 3Var[X] \end{aligned}$$

となるので、相関係数は

$$\begin{aligned} Cor[X, Y] &= \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]} \sqrt{Var[Y]}} \\ &= \frac{3Var[X]}{3Var[X]} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となります。



問題 3 X が平均 5、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して確率 $P[3 \leq X \leq 8]$ を求めて下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：エ

【解答例】

$$P[3 \leq X \leq 8] = P[3 - 5 \leq X - 5 \leq 8 - 5]$$

$$= P[-2 \leq N(0, 4) \leq 3]$$

$$= P\left[\frac{-2}{2} \leq \frac{N(0, 4)}{2} \leq \frac{3}{2}\right]$$

$$= P\left[-1 \leq N(0, 1) \leq \frac{3}{2}\right]$$

A ここまで出来て 8 点

$$= P[-1 \leq N(0, 1) \leq 0] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.5]$$

$$= P[0 \leq N(0, 1) \leq 1] + P[0 \leq N(0, 1) \leq 1.5]$$

ですから正規分布表を参照して

B ここまで出来て 12 点

$$\sim 0.3413 + 0.4332$$

$$= 0.7745$$

です。

問題 4 分布密度関数が次の $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられている確率変数 X に対して、確率 $P[0.5 \leq X \leq 2]$ 、平均値 $E[X]$ を求めて下さい。

配点：20 点 シラバス達成度目標：ウ

【解答例】 まず確率は

$$\begin{aligned} P[0.5 \leq X \leq 2] &= \int_{0.5}^2 f(x) dx \\ &= \int_{0.5}^1 2x dx \\ &= [x^2]_{0.5}^1 \\ &= 1 - 0.25 \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

確率・平均値 それぞれ 10 点

であり、平均値は

それぞれで

• 計算ミスは -3 点

• 積分範囲などの重大なミスは -5 点

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

です。

C ここでミスがあるものは基本 5 点とし、その後の計算に応じて +1 ~ +5 点

問題 5 2次元の確率変数 (X, Y) は成分同士が独立であり、各成分の期待値 $E[X], E[Y]$ は存在するものとします。各成分 X, Y の分布密度関数がそれぞれ $f(x), g(y)$ であるときに、 (X, Y) の分布密度関数が積 $f(x)g(y)$ となる事を利用して $E[XY] = E[X]E[Y]$ となる事を証明して下さい。

配点：5 点 シラバス達成度目標：オ

【解答例】 2次元の確率変数 (X, Y) の分布密度関数が $f(x)g(y)$ であるとき、関数 $w(x, y)$ に対して、確率変数 $w(X, Y)$ の期待値は

$$E[w(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) f(x) g(y) dx \right\} dy$$

で与えられます (積分が存在する時)。従って $w(x, y) = xy$ の時に計算すると

$$\begin{aligned} E[xy] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x) g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right\} y g(y) dy \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy \right\} \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

が得られます。

正しい計算を少しだけしているもの 2 点

- A 全体の議論の大まかな流れが出来ていれば 10 点
B 余りにも雑な記述の場合は 6 点
C 計算ミスのみ -3 点

問題 6 ある動物用の新しい飼料を試作し、任意抽出された 100 匹にこの飼料を毎日与えて 1 週間後に体重の変化を調べました。増加量の平均は 2.57kg、標準偏差は 0.35kg でした。この増加量について母平均を信頼度 98% で区間推定して下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：カ、キ、ク

【解答例】 母平均を m とします。大きさ 100 の大きなサンプルを取っているので母分散は標本分散で代用出来、従って中心極限定理によれば標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{0.35^2}{100}\right)$ で近似されます。

そこでまず

$$P[|\bar{X} - m| \leq d] = 0.98$$

となる様な $d > 0$ を求めます。少し変形すれば

$$0.98 = P\left[\left|\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{\frac{0.35^2}{100}}}\right| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{0.35^2}{100}}}\right] \sim P\left[|N(0, 1)| \leq \frac{d}{\sqrt{\frac{0.35^2}{100}}}\right]$$

となりますが、標準正規分布表に依れば、

$$P[|N(0, 1)| \leq 2.33] \sim 0.98$$

ですから、

$$\frac{d}{\sqrt{\frac{0.35^2}{100}}} = 2.33, \quad d = \frac{2.33 \times 0.35}{10} = 0.08155$$

であれば良い事が分かります。従って

$$P[|\bar{X} - m| \leq 0.08155] \sim 0.98$$

が分かりました。

標本平均の具体値が分かっていますのでこれを m に関する条件に読み替えれば

$$|2.57 - m| \leq 0.08155 \quad \text{すなわち} \quad 2.57 - 0.08155 \leq m \leq 2.57 + 0.08155$$

であることが 98 パーセントの信頼度で正しいわけです。

従って元データの平均値 m の、信頼度 98% の信頼区間は $[2.49, 2.65]$ になります。

問題 7 ある工場の資料によると、機械 A を用いて作られた製品の平均重量は 5.68g です。新しい機械 B が導入されて同じ製品が作られています、製品の平均重量に変化が生じたように思われたので、B による製品から 100 個無作為に抽出したところ平均重量が 5.71g、標準偏差が 0.23g でした。B を用いて作られた製品の重量は正規分布に従うものとし、また標準偏差はサンプル値の 0.23g であると仮定し、平均重量は変化したと言って良いかどうか、有意水準 5% で仮説検定して下さい。

配点：15 点 シラバス達成度目標：ケ

【解答例】 仮説 H_0 ：『B で作られた製品の平均重量は 5.68g である』を仮定します。すると問題に書かれている仮定から、B で作られた製品全体の中から取った大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(5.68, \frac{0.23^2}{100}\right)$ に従います。

問題は平均重量に変化があったかどうかですから両側検定として有意水準 5% の棄却域を取ります。

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq d]$$

となる様な $d > 0$ を求めれば良いわけですが、標準化して

$$\begin{aligned} &= P\left[\left|N\left(0, \frac{0.23^2}{100}\right)\right| \geq d\right] \\ &= P\left[|N(0, 1)| \geq \frac{d}{\frac{0.23}{10}}\right] \\ &= 1 - 2P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \\ 0.475 &= P\left[0 \leq N(0, 1) \leq \frac{d}{0.023}\right] \end{aligned}$$

ですから正規分布表を参照して $\frac{d}{0.023} \sim 1.96$ 、つまり、 $d \sim 0.045$ が分かります。これは

$$0.05 = P[|\bar{X} - 5.68| \geq 0.045]$$

を意味し、今回の具体値 5.71 はこの棄却域に入っていない。従って仮説を棄却するに足る理由はないと考えられ、平均重量が変化したとは言えないことが分かります。

- A 全体の議論の流れが出来ていれば
細かいミスがあっても 10 点
- B 非常に雑な記述のものは 6 点
- C 計算ミスのみのもの - 3 点

判定のミス - 2 点