問題 **1**　５月２８日のプロ野球公式戦において１２球団の安打数と得点は以下の表の通りでした。得点データを A、安打数データを B として以下の問いに答えて下さい。

得点 A	3	2	7	1	1	2	1	6	3	0	7	3
安打 B	5	8	6	5	8	8	7	11	7	4	7	8

（１）A, B それぞれの平均値 $E[A], E[B]$ と A の分散 $Var[A]$ を求めて下さい。

（２）安打数 B の得点 A への回帰直線の方程式が

$$y - E[B] = \frac{Cov[A,B]}{Var[A]}(x - E[A])$$

となることを使って得点が５点である時の安打数を概算して下さい。

配点：（１）２１点、（２）９点	シラバス達成度目標：ア、イ

解答例　（１）

$$E[A] = \frac{3+2+7+1+1+2+1+6+3+0+7+3}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

$$E[B] = \frac{5+8+6+5+8+8+7+11+7+4+7+8}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$$\begin{aligned} Var[A] &= \frac{0^2+(-1)^2+4^2+(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+(-2)^2+3^2+0^2+(-3)^2+4^2+0^2}{12} \\ &= \frac{1+16+4+4+1+4+9+9+16}{12} \\ &= \frac{64}{12} \\ &= \frac{16}{3} \\ &\sim 5.33 \end{aligned}$$

●３つの計算各７点

A　惜しい計算ミス　ー３点
B　通分無し、近似値がいい加減など　ー１点
C　重大なミス　ー５点

（２）共分散を計算しておきます。

$$\begin{aligned} Cov[A,B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{15+16+42+5+8+16+7+66+21+0+49+24}{12} - 21 \\ &= \frac{269}{12} - 21 \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

すると題意より回帰直線の方程式は

$$y - 7 = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{64}{12}}(x-3)$$

となりますから、$x = 5$ のとき

$$y = \frac{17}{64} \cdot 2 + 7 \sim 7.53$$

を得ます。以上から得点が 5 点の時の安打数は概算で 7.5 本と考えられます。

●共分散の計算で６点、回帰計算で３点

A　共分散の計算式は良いがその後ミス　３点
E　共分散の計算で重大なミス　１点

B　共分散のミスのみにより回帰計算ミス　２点

C　（１）のミスのみでミス　全体で６点
D　回帰計算でのミスのみ　全体で７点

問題 **2** 次のデータの平均値と分散を求めて下さい。

得点	10	9	8	7	6
相対度数	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

配点：１０点	シラバス達成度目標：ア

解答例

$$
\begin{aligned}
\text{（平均値）} &= 10\cdot\frac{1}{3}+9\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{1}{3}+7\cdot\frac{1}{12}+6\cdot\frac{1}{12}\\
&= \frac{40+18+32+7+6}{12}\\
&= \frac{103}{12}\\
&\sim 8.583
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{（分散）} &= 10^2\cdot\frac{1}{3}+9^2\cdot\frac{1}{6}+8^2\cdot\frac{1}{3}+7^2\cdot\frac{1}{12}+6^2\cdot\frac{1}{12}-\left(\frac{103}{12}\right)^2\\
&= \frac{400+162+256+49+36}{12}-\left(\frac{103}{12}\right)^2\\
&= \frac{903}{12}-\left(\frac{103}{12}\right)^2\\
&= \frac{227}{144}\\
&\sim 1.58
\end{aligned}
$$

●各５点

A　大体良いが計算ミスあり　ー２点
B　重大なミス　ー５点
C　途中まで（そこまではOK）　ー３点

問題 **3** 確率変数 X の分布密度関数（あるいは確率密度関数とも言います）が $f(x)$ であるとはどう云う事か数式を使って示して下さい。

配点：１０点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　任意の区間 $[a,b]$ に対して、確率変数 X の値がこの区間に入る確率が

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

で表されるとき、$f(x)$ は X の分布密度であると言います。

A　この積分のみ書いてあるもの　５点

B　分布関数で説明しているが分布関数の説明がないもの　ー２点
C　記法ミスなど　ー２点

問題 4 確率変数 H の分布密度関数が次の $h(x)$ で与えられているとき、平均値 $E[H]$ と確率 $P[-1 \leq H \leq 0.5]$ を求めて下さい。

$$h(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-x^2 + 2x) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：２０点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　まず平均値は

$$\begin{aligned} E[H] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx \\ &= \int_0^2 \frac{3}{4}(-x^3 + 2x^2)dx \\ &= \left[-\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

●各１０点

B　計算式で重大ミス　３点
C　計算ミス　ー３点

であり、また題意の確率は

$$\begin{aligned} P[-1 \leq H \leq 0.5] &= \int_{-1}^{0.5} h(x)dx \\ &= \int_0^{0.5} \frac{3}{4}(-x^2 + 2x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_0^{0.5} \\ &= -\frac{1}{32} + \frac{3}{16} \\ &= \frac{5}{32} \\ &= 0.15625 \end{aligned}$$

A　積分範囲がー１からのままになっているもの　６点

となります。

問題 5 確率変数 R が平均 1、分散 4 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[R \leq w] = 0.858$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例　R を標準化すると

$$\begin{aligned} 0.858 &= P[R \leq w] \\ &= P[R - 1 \leq w - 1] \\ &= P\left[\frac{R-1}{2} \leq \frac{w-1}{2}\right] \\ &= P\left[N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right] \end{aligned}$$

A　立式は良いが後はダメ　３点

であり、これが 0.5 以上であることから $\frac{w-1}{2}$ は正であって

$$\begin{aligned} 0.858 &= 0.5 + P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right] \\ 0.358 &= P\left[0 \leq N(0,1) \leq \frac{w-1}{2}\right] \end{aligned}$$

が分かります。標準正規分布表に依れば、$\frac{w-1}{2} \sim 1.07$ ですからここから w を求めれば $w \sim 3.14$ が得られます。

B　計算ミス　ー５点
C　重大な変形／計算ミス　ー１０点
D　記法不十分　ー５点

問題 **6** 平成２３年度大学入試センター試験・国語の受験者数は５０万人でした。試験結果は２００点満点のところ平均点が 111.3、標準偏差（分散の正の平方根）が 33.1 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。
　得点が１５０点だった受験者の順位はだいたい何番くらいでしょうか。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例　得点を表す確率変数 X は正規分布 $N(111.3, 33.1^2)$ に従っています。すると求めるべきものは 151 点以上の人が何人いるかであり、それは $P[150 < X]$ を求め、これに 500000 を掛ける事によって概算出来ます。これは

$$
\begin{aligned}
P[150 < X] &= 1 - P[X \leq 150] \\
&= 1 - P[X - 111.3 \leq 150 - 111.3] \\
&= 1 - P\left[\frac{X - 111.3}{33.1} \leq \frac{38.7}{33.1}\right] \\
&\sim 1 - P[N(0,1) \leq 1.17] \\
&= 1 - (P[-\infty < N(0,1) < 0] + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.17]) \\
&= 1 - (0.5 + P[0 \leq N(0,1) \leq 1.17])
\end{aligned}
$$

A　計算ミス　ー５点
C　重大な計算／変形ミス　ー８点

ですから正規分布表から

$$
\begin{aligned}
&= 0.5 - 0.3790 \\
&= 0.1210
\end{aligned}
$$

が得られ、これに受験者総数の 500000 を掛けて

$$500000 \times 0.121 = 60500$$

B　下からの順位を計算して
そのままのもの　ー５点

が分かります。151 点以上の人が大体これだけ居ますから 150 点の人は大体 60500 番程度であると考えられます。