問題 **1** 次の表は日本のプロサッカーリーグである J1 の、2013 年における８試合目終了時点と３２試合目終了時点での勝ち点を表にしたものです。

『勝ち点』とは、勝ち：３点、引き分け：１点、負け：０点で加算されてゆく数値の事で、X が８試合目終了時点での勝ち点、Y が３２試合目終了時点での勝ち点を表しています。

	横浜	浦和	広島	大阪	鹿島	川崎	東京	新潟	清水
X	19	16	14	12	15	6	12	7	12
Y	62	58	57	56	56	54	51	49	47
参考値 XY	1178	928	798	672	840	324	612	343	564
	名古屋	仙台	柏	鳥栖	大宮	甲府	湘南	磐田	大分
X	12	9	10	7	20	10	6	5	3
Y	46	45	42	42	39	35	25	20	14
参考値 XY	552	405	420	294	780	350	150	100	42

（１）X, Y の平均値を求めて下さい。

（２）X の分散、X, Y の共分散を求めて下さい。その際上の表の参考値 XY を利用して下さい。

（３）Y の分散が 173、標準偏差が 13.15 である事と 4.63^2 の計算を使って X, Y の相関係数を求めて下さい。ただし、相関係数とは、共分散をそれぞれの標準偏差の積で割ったものとします。

（１）の結果を（２）で使いますし、（２）の結果は（３）で使いますのでくれぐれも計算ミスのないようにして下さい。

配点：（１）２４点（２）２０点（３）４点	シラバス達成度目標：ア、イ、オ

解答例　（１）

少しの計算ミスのみ　９点

ミスが多いもの、重大なミス　５点

$$E[X] = \frac{19+16+14+\cdots+5+3}{18} = \frac{195}{18} = 10.833\cdots$$
$$E[Y] = \frac{62+58+57+\cdots+20+14}{18} = \frac{798}{18} = 44.33\cdots$$

それぞれ１２点

（２）

平均値を近似値でやっているなどの少しの計算ミス　７点

定義式の誤りなど重大なミス　５点

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= \frac{19^2+16^2+\cdots+4^3}{18} - \left\{\frac{195}{18}\right\}^2 \\ &= \frac{2499\cdot 18 - (195)^2}{18^2} \\ &= \frac{6957}{324} \\ &= 21.4722\cdots \\ Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \frac{62+58+\cdots+14}{18} - \frac{195}{18}\frac{798}{18} \\ &= \frac{9352\cdot 18 - 195\cdot 798}{18^2} \\ &= \frac{12726}{324} \\ &= 39.277\cdots \end{aligned}$$

それぞれ１０点

（３）$4.63^2 = 21.4369 \sim Var[X]$ に注意すると、

$$（相関係数） = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{39.2778}{4.63\cdot 13.15} \sim 0.645$$

となります。

数値的には間違いなりにも正しい計算方法をであるもの　３点

式のみ　１点

問題 **2** 確率変数 H の分布密度関数が次の $h(x)$ で与えられているとします：

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき確率 $P[-1 \le H \le 1]$、平均値 $E[H]$、分散 $Var[H]$ を求めて下さい。

配点：２０点	シラバス達成度目標：ウ

解答例

$$P[-1 \le H \le 1] = \int_{-1}^{1} h(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}xdx = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

確率　７点

ここが出来ていないもの　３点まで

$$E[H] = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

期待値　６点

$$\begin{aligned} Var[H] &= E[H^2] - E[H]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2h(x)dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}x^3dx - \frac{16}{9} \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2 - \frac{16}{9} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

分散　７点

ここが出来ていないもの　３点

ここで全く駄目なもの　１点

単純な計算ミス　５～４点

問題 **3** 確率変数 R が平均 -2、分散 9 の正規分布に従うとき、標準正規分布表を参照して条件 $P[w \le R] = 0.0102$ を満たす w の値を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ

解答例

$$\begin{aligned} 0.0102 &= P[w \le R] \\ &= P[w \le N(-2,9)] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \le \frac{N(-2,9)+2}{3}\right] \\ &= P\left[\frac{w+2}{3} \le N(0,1)\right] \end{aligned}$$

この確率が 0.5 未満なので $0 < \frac{w+2}{3}$ であって

$$= 0.5 - P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{w+2}{3}\right]$$

$$P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{w+2}{3}\right] = 0.4898$$

ですから正規分布表から

$$\frac{w+2}{3} \sim 2.32 \quad \text{すなわち} \quad w = 4.96$$

が分かります。

全体の流れも出来ていて、
少しの計算ミスのみのもの　１２点

全体の流れは出来ているがミスの多いもの　９点

全体の流れも出来ていないもの　６点

少しの計算のみ　３点

問題 **4** 平成２５年度大学入試センター試験・国語の受験者数は５０万人でした。試験結果は 200 点満点のところ平均点が 101.0、標準偏差（分散の正の平方根）が 33.0 であり、得点分布はほぼ正規分布でした。

得点が 150 点だった受験者の順位はだいたい何番くらいでしょうか。

配点：１２点	シラバス達成度目標：エ

解答例　試験結果を意味する確率変数を X とすれば、$P[150 < X]$ に受験者総数 500000 を掛けたものが 150 点より高得点だった受験者の人数ですから、これを計算すれば順位が分かります。

$$\begin{aligned} P[150 < X] &\sim P[150 < N(101, 33^2)] \\ &= P\left[\frac{150-101}{33} < N(0,1)\right] \\ &\sim P[1.485 < N(0,1)] \\ &= 0.5 - P[0 \leq N(0,1) \leq 1.485] \\ &\sim 0.5 - 0.431 \\ &= 0.069 \end{aligned}$$

0.5-0.4306=0.0694

0.0694×500000=34700

でも問題なくOK

全体の流れもよく、少しの計算ミスのみ　１０点

全体の流れは良いがミスの多いもの　８点

全体が流れになっておらず、記述も雑でミスもある　５点

ですから、

$$0.069 \times 500000 = 34500$$

となって求める順位は 34500 番程度と言えます。

問題 **5** ２次元の確率変数 (S,T) の分布密度関数が $w(x,y)$ であるとはどう云う事でしょうか。『体積』をキーワードにして大雑把に説明して下さい。

配点：５点	シラバス達成度目標：ウ、オ

解答例　２次元の確率変数 (S,T) の分布密度が $w(x,y)$ であるとは、任意の領域 D に対して、

$$P[(S,T) \in D] = \left(\begin{array}{l} \text{領域 } D \text{ を床とし、この領域の境界線上に垂直な壁を立て、} \\ \text{曲面 } z = w(x,y) \text{ を屋根とした立体の体積} \end{array} \right)$$

が成り立つことです。

少しの記述の不十分さ　３〜４点