問題 **1** 次の各文章の下線部は間違っています。それぞれ誤りを指摘し正しく修正して下さい。

（１）３次元の確率変数 (X, Y, Z) の各成分が独立であるとき、確率変数 $X + 2Y - 3Z$ の分散は $\underline{Var[X] + 2Var[Y] - 3Var[Z]\text{ である。}}$ただし、各成分の期待値と分散は存在するものとする。

（２）独立な 10 個の確率変数 $X_1 \ldots, X_{10}$ は全て同じ分布に従い、期待値は 1、分散は 4 であるとする。このとき $\frac{X_1+\cdots+X_{10}}{10}$ の $\underline{\text{期待値は } 10\text{、分散は } \frac{4}{10^2} \text{ である。}}$

配点：（１）６点（２）６点	シラバス達成度目標：イ、オ、カ、キ

解答例　（１）正解は $Var[X] + 4Var[Y] + 9Var[Z]$。定数倍は自乗で外に出る事に注意。

正しいが係数が外に出ていないなど本質から外れたもの　３点

３を外に出す時－９になっているミスのみ　４点

（２）正解は期待値は 1、分散は $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$。

期待値、分散でそれぞれ３点

問題 **2** 確率変数 X の分布密度関数が次の $f(x)$ で与えられているとき、$P[-\infty < X < \infty] = 1$ である事を利用して定数 a の値を求めて下さい。また平均値 $E[X]$、分散 $Var[X]$ を求めて下さい。

$$f(x) = \begin{cases} a(2-x) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

配点：２５点	シラバス達成度目標：ウ

解答例　まず a の値を求めます。

$$\begin{aligned} 1 &= P[-\infty < X < \infty] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_0^2 a(2-x)dx \\ &= \left[-\frac{a}{2}(2-x)^2\right]_0^2 \\ &= 2a \end{aligned}$$

によれば、$a = \frac{1}{2}$ です。

●ａの値で　１０点

計算は良いが結論のみないもの　－１点

計算ミス　－２点

重大なミス、ミスが多い　－４点

次に平均値ですが、

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} x(2-x) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 \\
&= 2 - \frac{4}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

です。

●平均値で　１０点

計算ミス　－２点

式のミスなど重要なミス　－４点

最後に分散は

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 (2-x) dx - \frac{4}{9} \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 - \frac{4}{9} \\
&= \frac{8}{3} - 2 - \frac{4}{9} \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

です。

●分散で　５点

計算ミス　３点

定義式が違っているもの　１点

問題 **3** 次の関数 $f(x)$：

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & 0 \leq x \end{cases}
$$

に対して、たたみ込み $(f * f)(x)$ を計算して下さい。

配点：５点	シラバス達成度目標：イ、オ

解答例

$$
\begin{aligned}
(f * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) f(y) dy \\
&= \int_0^{\infty} f(x-y) \mathrm{e}^{-y} dy \\
&= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-y)} \mathrm{e}^{-y} dy & 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \mathrm{e}^{-x} dy & 0 \leq x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & 0 \leq x \end{cases}
\end{aligned}
$$

計算ミスが少し　４点

計算ミスが多いもの　２点

問題 **4** ある溶液の pH を１０回測定したところ、次の値を得ました：

$$7.86,\quad 7.90,\quad 7.81,\quad 7.94,\quad 7.84,\quad 7.92,\quad 7.91,\quad 7.93,\quad 7.90,\quad 7.70$$

（１）今回の測定値の平均値と分散を求めて下さい。

（２）溶液の pH の測定値全体は正規分布に従う事が経験的に判っています。以下の事実と裏面の χ^2 分布表を使い、今回の測定値を基にして測定値全体の分散の信頼度９８％の信頼区間を求めて下さい。

事実　平均 m、分散 v の正規母集団から取った大きさ n の標本分散を $\bar{V}$ としたとき、$\frac{n\bar{V}}{v}$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従います。

配点：（１）２０点（２）８点	シラバス達成度目標：ア、エ、カ、ク

解答例　（１）平均値は

$$\text{（平均値）} = \frac{7.86 + 7.90 + \cdots + 7.70}{10} = \frac{78.71}{10} = 7.871$$

です。

● 分散で　１０点

計算ミス　－２点
計算ミスが多い　－５点
定義式のミス　－５点

● 平均値で　１０点

計算ミス　－３点
余りに酷い計算ミス　－５点
惜しいミス　－１点

分散は

$$\text{（分散）} = \frac{7.86^2 + 7.90^2 + \cdots + 7.70^2}{10} - 7.871^2 = \frac{619.5743}{10} - 61.952641 = 0.004789$$

です。

（２）測定値全体の平均値を m、分散を v とします。つまり、測定値全体は正規分布 $N(m, v)$ に従うものとします。

この母集団からとった大きさ１０の標本分散を $\bar{V}$ とすると、$\frac{10}{v}\bar{V}$ は自由度９のカイ自乗分布に従います。

標本分散の記号定義なし　－２点

従ってカイ自乗分布表によれば、

$$P\left[2.088 \leq \frac{10}{v}\bar{V}\right] \sim 0.99, \quad P\left[21.67 \leq \frac{10}{v}\bar{V}\right] \sim 0.01$$

ですから

$$P\left[2.088 \leq \frac{10}{v}\bar{V} \leq 21.67\right] \sim 0.98$$

である事が判ります。

ここの計算が出来ていれば　５点

従って今回のサンプル分散が 0.004789 であったことから、信頼度 98 ％で

$$2.088 \leq \frac{10}{v}0.004789 \leq 21.67$$

が成り立っている事が判りますが、これを変形すれば

$$\frac{0.04789}{21.67} \leq v \leq \frac{0.04789}{2.088}$$
$$0.00221 \leq v \leq 0.0229$$

計算ミス　－２点

が判り、これが求める信頼区間です。

問題 5 ある工場で生産しているケース入洗剤の内容量は、従来の測定によって母分散が $(3.5\mathrm{g})^2$ の正規分布に従う事が知られています。

ある単位生産時間の製品の中から２５個を無作為に抽出して測定したところ、平均値が $202.8\mathrm{g}$ でした。内容量の母平均 m に対して信頼度９５％の信頼区間を求めて下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ、ク

解答例　この母集団からとった大きさ２５の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{3.5^2}{25}\right)$ に従います。

標本平均の記号定義なし　－２点

まず

$$0.95 = P[|\bar{X} - m| \le d]$$

となる正数 d を求めます。

$$\begin{aligned}
0.95 &= P\left[\left|N\left(m, \frac{3.5^2}{25}\right) - m\right| \le d\right] \\
&= P\left[|N(0,1)| \le \frac{d}{\frac{3.5}{5}}\right] \\
&= 2P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{0.7}\right] \\
0.475 &= P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d}{0.7}\right]
\end{aligned}$$

ですから、標準正規分布表によれば

$$\frac{d}{0.7} \sim 1.96, \quad 従って \quad d \sim 1.372$$

が得られます。

● dを求めてサンプル値を代入すると云う全体の流れが出来ていれば　１０点

少しの計算ミス　－３点

重大な計算ミス等　－５点

従って

$$P[|\bar{X} - m| \le 1.372] \sim 0.95$$

ですから、今回のサンプル平均値が 202.8 だった事から、信頼度 95 ％で

$$|202.8 - m| \le 1.372, \quad 従って \quad 201.428 \le m \le 204.172$$

が成立しており、これが求める信頼区間になります。

『信頼度９５％で』成立すると云う言及がないもの　－１点

問題 6 ある工場で生産している製品Ａの重さは、通常は平均値が $80\mathrm{g}$、標準偏差が $4\mathrm{g}$ の正規分布をしています。ある日の製品の中から１００個の標本を抽出して測定したところ、重さの平均値が $80.8\mathrm{g}$ でした。その日の製品は平常と比べて重いと言えるでしょうか。正規分布に従う事と標準偏差が $4\mathrm{g}$ である事は通常通りであるものとして有意水準５％で検定して下さい。

配点：１５点	シラバス達成度目標：エ、ケ

帰無仮説のないもの、あるいは間違っているもの　－５点

解答例　まず

【帰無仮説】: この日も生産される製品Ａの重さは正規分布 $N(80, 4^2)$ に従う

が正しいと仮定し、有意水準 5 ％で右片側に棄却域を設定して検定します。

この母集団からとった大きさ 100 の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(80, \frac{4^2}{100}\right)$ に従いますから

片側なのに絶対値があるなど記法上のミス　－１点

$$0.05 = P\left[d \le N\left(80, \frac{4^2}{100}\right)\right]$$

となる d を求めます。これは

$$0.05 = P\left[\frac{d-80}{\frac{4}{10}} \le N(0.1)\right]$$

$$0.45 = P\left[0 \le N(0,1) \le \frac{d-80}{0.4}\right]$$

計算ミス　－３点

を意味しますから標準正規分布表によれば

$$\frac{d-80}{0.4} \sim 1.645, \quad \text{すなわち} \quad d \sim 80.658$$

が得られます。従ってこの片側検定の棄却域は $[80.658, \infty)$ です。

今回のサンプル値は 80.8 であり、これはこの棄却域に入っています。従って帰無仮説は棄却され、この日の製品は通常より重いと言えます。