

問題 1 ある日のプロ野球公式戦において 12 球団の得点と安打数は以下の表の通りでした。得点データを A 、安打数データを B として以下の問いに答えて下さい。

得点 A	3	2	2	12	2	1	3	1	2	0	7	1
安打数 B	4	5	12	9	9	4	8	6	8	6	9	4

- (1) 平均値 $E[A], E[B]$ を求めてください。
- (2) B の分散 $Var[B]$ と共分散 $Cov[A, B]$ を求めて下さい。
- (3) 得点 A の安打数 B への回帰直線の方程式が

$$y - E[A] = \frac{Cov[A, B]}{Var[B]}(x - E[B])$$

となることを使って安打数が 10 本である時の得点を推測して下さい。

配点：(1) 20 点 (2) 10 点 (3) 5 点 シラバス達成度目標：ア、イ、オ

解答例 (1)

$$\begin{aligned} E[A] &= \frac{3 + 2 + 2 + 12 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 0 + 7 + 1}{12} \\ &= \frac{36}{12} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[B] &= \frac{4 + 5 + 12 + 9 + 9 + 4 + 8 + 6 + 8 + 6 + 9 + 4}{12} \\ &= \frac{84}{12} \\ &= 7 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} Var[B] &= \frac{(4-7)^2 + (5-7)^2 + (12-7)^2 + (9-7)^2 + (9-7)^2 + (4-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (9-7)^2 + (4-7)^2}{12} \\ &= \frac{3^2 + 2^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{12} \\ &= \frac{9 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 25 + 1 \cdot 4}{12} \\ &= \frac{27 + 16 + 25 + 4}{12} \\ &= \frac{72}{12} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov[A, B] &= E[AB] - E[A]E[B] \\ &= \frac{12 + 10 + 24 + 108 + 18 + 4 + 24 + 6 + 16 + 0 + 63 + 4}{12} - 21 \\ &= \frac{289 - 252}{12} \\ &= \frac{37}{12} \\ &= 3.08333 \dots \end{aligned}$$

(3) 回帰直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{\frac{37}{12}}{6}(x - 7)$$

となるので、これに $x = 10$ を代入すると

$$\begin{aligned} y - 3 &= \frac{37}{24} \\ y &= 3 + \frac{37}{24} \\ &= 4.541666 \dots \end{aligned}$$

が得られ、安打が 10 本のときの得点は 4.5 点と推測されます。

問題 2 次のデータの平均値と分散を求めて下さい。

75, 55, 72, 60, 64, 58

配点：16 点 シラバス達成度目標：ア

解答例

$$\begin{aligned} (\text{平均値}) &= \frac{75 + 55 + 72 + 60 + 64 + 58}{6} \\ &= \frac{384}{6} \\ &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{分散}) &= \frac{(75 - 64)^2 + (55 - 64)^2 + (72 - 64)^2 + (60 - 64)^2 + (64 - 64)^2 + (58 - 64)^2}{6} \\ &= \frac{11^2 + 9^2 + 8^2 + 4^2 + 0 + 6^2}{6} \\ &= \frac{121 + 81 + 64 + 16 + 36}{6} \\ &= \frac{318}{6} \\ &= 53 \end{aligned}$$

問題 3 確率変数 H の分布密度関数が次の $h(x)$ で与えられているとします：

$$h(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき確率 $P[-3 \leq H \leq 0]$ と平均値 $E[H]$ を求めて下さい。

配点：14 点 シラバス達成度目標：ウ

解答例

$$\begin{aligned} P[-3 \leq H \leq 0] &= \int_{-3}^0 h(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[H] &= \int_{-\infty}^{\infty} xh(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 xh(x) dx \end{aligned}$$

ですが、 $h(x)$ は偶関数ですから $xh(x)$ は奇関数になり、従って積分値は0です。

$$E[H] = 0.$$

問題 4 関数 $p(x)$ が確率変数 X の分布密度関数であるとはどういう事ですか。

配点：10 点 シラバス達成度目標：ウ

解答例 任意の区間 $[a, b]$ に対して

$$P[X \in [a, b]] = \int_a^b p(x)dx$$

が成り立つこと。

問題 5 2次元の確率変数 (X, Y) の分布密度関数は $h(x, y)$ であり、 X, Y の分布密度関数はそれぞれ $f(x), g(y)$ であるとします。また、各種の期待値、分散、共分散等はすべて存在するものとします。

次の各文章は正しいでしょうか間違っているでしょうか。証明等は必要ありませんから○か×で教えてください。

(1) (X, Y) の分布密度関数は $f(x)g(y)$ である。

(2) 任意の定数 a, b, c に対して

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y]$$

となる。

(3) X, Y が独立ならば任意の定数 a, b に対して

$$Var[aX + bY] = aVar[X] + bVar[Y]$$

となる。

配点：各5 点 シラバス達成度目標：イ、オ

解答例 (1) × (2) × (3) ×

問題 6 関数 $w(x)$:

$$w(x) = \begin{cases} e^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

に対してたたみ込み $(w * w)(x)$ を求めてください。

配点：10 点 シラバス達成度目標：オ

解答例 【解答例その 1】 たたみ込みの定義は（形式的に）広義積分ですから

$$\begin{aligned} (w * w)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)w(y)dy \\ &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N w(x-y)w(y)dy \end{aligned}$$

となりますが、 N は x より大きな実数の範囲で極限をとることにして差し支えありません。

まず被積分関数の第 2 因子 $w(y)$ ですが、これは $y < 0$ の範囲では 0 ですから

$$\begin{aligned} \int_{-M}^N w(x-y)w(y)dy &= \int_0^N w(x-y)w(y)dy \\ &= \int_0^N w(x-y)e^{-y}dy \end{aligned}$$

となります。次いで第 1 因子ですが、これは $x-y < 0$ 、すなわち $x < y$ の範囲では 0 ですから

$$= \begin{cases} \int_0^x w(x-y)e^{-y}dy & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

となっており、従って M, N は消えてしまいますから

$$\begin{aligned} (w * w)(x) &= \lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N w(x-y)w(y)dy = \begin{cases} \int_0^x w(x-y)e^{-y}dy & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^x e^{-(x-y)}e^{-y}dy & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} xe^{-x} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となります。

【解答例その 2】

$$\begin{aligned} (w * w)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(x-y)w(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} w(x-y)e^{-y}dy \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x e^{-(x-y)}e^{-y}dy & 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x e^{-x}dy & 0 \leq x \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ xe^{-x} & 0 \leq x \end{cases} \end{aligned}$$